

ACTA MATHEMATICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

G. ALEXITS, E. EGERVÁRY, L. FEJÉR, CH. JORDÁN,
L. KALMÁR, L. RÉDEI, A. RÉNYI, F. RIESZ,
B. SZ. NAGY, GY. SZ. NAGY, P. TURÁN, O. VARGA

REDIGIT

G. HAJÓS

TOMUS II.

FASCICULI 1—2.



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

ACTA MATHEMATICA HUNGARICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA III. OSZTÁLYÁNAK
MATEMATIKAI KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V., ALKOTMÁNY-U. 21

Az Acta Mathematica orosz, francia, angol és német nyelven közöl értekezéseket a matematika köréből.

Az Acta Mathematica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg 20 ív terjedelemben.

A közlésre szánt kéziratok, lehetőleg géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Mathematica előfizetési ára kötetenként (egy évre) belföldre 40 forint, külföldre 60 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest, V., Alkotmány-u. 21. Bankszámla 936.550), külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankszámla 929.040 sz.) vagy külföldi képviselőiteinél és bizományosainál.

„Acta Mathematica” издает работы из области математических наук на русском французском, английском и немецком языках.

„Acta Mathematica” выходит в брошюрах переменного объема несколько выпусков объединяются в одном томе. (20 печатных листов.)

Ежегодно предвидено издание одного тома.

Предназначенные для публикации авторские рукописи следует направлять, по возможности машинописью, по следующему адресу:

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направляется всякая корреспонденция для редакции и администрации.

Подписная цена „Acta Mathematica” — 60 форинтов за том. Заказы принимает Предприятие по внешней торговле книг и газет „Kultúra” (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Счет Банка No. 929.040) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ÜBER DIE TRANSFORMIERTEN DER ARITHMETISCHEN MITTEL VON ORTHOGONALREIHEN

Von

GEORG ALEXITS (Budapest), Mitglied der Akademie

1. Einleitung

1.1. Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall (a, b) definiertes System von normierten Orthogonalfunktionen. Betrachten wir die Entwicklung

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$$

der Funktion $f(x)$. Ist $\{\lambda_n\}$ irgendeine Zahlenfolge, so verstehen wir unter der λ -Transformierten der Reihe $\sum c_n \varphi_n(x)$ die Reihe $\sum \lambda_n c_n \varphi_n(x)$. Gehört $f(x)$ zu einer Funktionenklasse A und ist die λ -Transformierte ihrer Entwicklung die Entwicklung einer Funktion $g(x)$, welche zur Funktionenklasse B gehört, so sagen wir, daß $\{\lambda_n\}$ zur Klasse (A, B) gehört.

1.2. Eine besonders in der Theorie der Fourierreihen viel untersuchte Frage ist die folgende: Unter welchen Bedingungen läßt sich behaupten, daß eine vorgegebene Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ zur Klasse (A, B) gehört? Im folgenden werden wir mehrere, nur für Fourierreihen bewiesene Sätze aus diesem Fragenkreis auf viel allgemeinere Orthogonalreihen übertragen. Ihre aus der Theorie der Fourierreihen bekannten Beweise nützen recht spezielle Eigenschaften der Fourierreihe aus. Unsere Verallgemeinerungen erreichen wir dadurch, daß wir zeigen: Der gemeinsame Kern aller dieser Sätze besteht einzig und allein in der (bei den Fourierreihen wohlbekannten) Eigenschaft des Orthogonalsystems $\{\varphi_n(x)\}$, daß die Lebesgueschen Funktionen

$$\int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt$$

der arithmetischen Mittel der nach den $\varphi_n(x)$ fortschreitenden Entwicklungen fast überall gemeinsam beschränkt bleiben.

2. Allgemeine Sätze über die Transformaten der arithmetischen Mittel von Funktionenreihen

2.1. Sei $\sum a_n$ eine beliebige Reihe. Bezeichne σ_n ihr n -tes arithmetisches Mittel und $\sigma_n(\lambda)$ das arithmetische Mittel ihrer λ -Transformaten, oder was dasselbe bedeutet, die λ -Transformierte des n -ten arithmetischen Mittels σ_n . Wir beweisen die folgende Beziehung über die λ -Transformaten der arithmetischen Mittel¹:

$$(1) \quad \sigma_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (k+1) \sigma_k \cdot \Delta^2 \lambda_k + \\ + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sigma_k \cdot \Delta \lambda_{k+1} + \lambda_n \sigma_n.$$

Sei, in der Tat, $\delta_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \lambda_k$, ferner $\delta'_k = \delta_k - \delta_{k+1}$ und $\delta''_k = \delta'_k - \delta'_{k+1}$. Ist s_n die n -te Partialsumme der Reihe $\sum a_n$, so ergibt sich mittels einer Abel-Transformation zunächst

$$\sigma_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k \delta'_k + s_n \delta_n,$$

sodann folgt unter Beachtung von $\delta_n = \delta'_n$ nach wiederholter Abel-Transformation

$$(2) \quad \sigma_n(\lambda) = \sum_{k=0}^n s_k \delta'_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \sigma_k \delta''_k + (n+1) \sigma_n \delta'_n.$$

Die zweiten Differenzen δ''_k sollen jetzt den zweiten Derivierten des Produktes zweier Funktionen ähnlich dargestellt werden:

$$\delta''_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cdot \Delta^2 \lambda_k + 2 \Delta \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cdot \Delta \lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \Delta^2 \left(1 - \frac{k}{n+1}\right).$$

Da $\Delta \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$, also $\Delta^2 \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) = 0$ ist, folgt somit

$$\delta''_k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \Delta^2 \lambda_k + \frac{2}{n+1} \Delta \lambda_n.$$

Beachten wir noch $\delta'_n = \frac{\lambda_n}{n+1}$, so ergibt sich demnach (1) unmittelbar aus (2).

2.2. Wählen wir für a_n irgendwelche Funktionen f_n , die zu einem Funktionenraum $\mathfrak{F}$ gehören, in welchem eine lineare Operation $U(f)$, deren Werte zu einem Banachschen Raum gehören, mit der Elementennorm $\|U(f)\|$ erklärt ist. Wir beweisen den folgenden Satz:

¹ Diese Beziehung wurde für ganz andere Zwecke bewiesen von R. E. A. C. PALEY und A. ZYGMUND, On some series of functions, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **26** (1930), pp. 337–357.

Ist $\|U(\sigma_n)\| = O(1)$ und $\{\lambda_n\}$ eine konvexe Nullfolge, so gilt

$$\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1).$$

Die Beziehung (1) führt zunächst zu folgender Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| \leq \\ & \leq \left\| U \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (k+1) \sigma_k \cdot \Delta^2 \lambda_k - \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) (k+1) \sigma_k \cdot \Delta^2 \lambda_k \right] \right\| + \\ & + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta \lambda_{k+1} + \frac{2}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta \lambda_{k+1} + \\ & + \lambda_n \|U(\sigma_n)\| + \lambda_m \|U(\sigma_m)\|. \end{aligned}$$

Da $\{\lambda_n\}$ eine Nullfolge und $\|U(\sigma_n)\| = O(1)$ ist, sind die beiden letzten Glieder von der Größenordnung $o(1)$ und wegen der Konvexität ist auch $(k+1)\Delta\lambda_{k+1} = o(1)$, also sind auch die beiden vorletzten Glieder von der Größenordnung $o(1)$. Bezeichne nun S_n die n -te Partialsumme der Reihe $\sum (k+1)\sigma_k \cdot \Delta^2 \lambda_k$ und $S_n^{(1)}$ ihr n -tes arithmetisches Mittel. Mit dieser Bezeichnung läßt sich alsdann schreiben:

$$(3) \quad \begin{aligned} \|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| & \leq \|U(S_n^{(1)} - S_m^{(1)})\| + o(1) \leq \\ & \leq \|U(S_n^{(1)} - S_n)\| + \|U(S_n - S_m)\| + \|U(S_m - S_m^{(1)})\| + o(1). \end{aligned}$$

Die Reihe $\sum (k+1)\Delta^2 \lambda_k$ ist konvergent, da $\{\lambda_n\}$ eine konvexe Nullfolge ist, also gilt

$$(4) \quad \begin{aligned} \|U(S_n - S_m)\| & \leq \sum_{k=m+1}^n (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta^2 \lambda_k = \\ & = O(1) \sum_{k=m+1}^n (k+1) \Delta^2 \lambda_k = o(1). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\sum_{k=1}^m \frac{k}{m+1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta^2 \lambda_k = o(1).$$

Dann ist aber

$$(5) \quad \|U(S_m - S_m^{(1)})\| \leq \sum_{k=1}^m \frac{k}{m+1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta^2 \lambda_k = o(1)$$

und auf derselben Weise ergibt sich

$$(6) \quad \|U(S_n^{(1)} - S_n)\| = o(1).$$

Die Beziehungen (3), (4), (5) und (6) sind insgesamt mit unserer Behauptung gleichwertig.

2.3. Ist $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$, so läßt sich eine gegen Unendlich konvergierende, positive, konkave Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ bestimmen, für welche $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$ ist.

Bezeichne $\{\mu_n\}$ eine gegen Unendlich konvergierende, positive, konkave Zahlenfolge mit folgenden Eigenschaften:

$$1^0 \quad \|U(\sigma_n)\| \leq \frac{1}{\mu_n^2},$$

$$2^0 \quad \Delta \mu_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$3^0 \quad \Delta^2 \mu_n = O\left(\frac{\Delta \mu_n}{n}\right).$$

Die Erfüllbarkeit von 1^0 folgt aus der Annahme $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$. Man wähle nämlich eine genügend langsam gegen Null konvergierende, positive, monotone Zahlenfolge $\{\nu_n\}$ mit $\nu_n^2 \geq \|U(\sigma_n)\|$ und bezeichne mit $\{1/\mu_n\}$ die konvexe Hülle von $\{\nu_n\}$. Dann leistet $\{\mu_n\}$ das Verlangte. 2^0 ist erfüllt, wenn $\{\mu_n\}$ genügend langsam gegen Unendlich strebt (z. B. für $\mu_n = \log n$), endlich ist auch 3^0 erfüllt, wenn das Anwachsen von $\{\mu_n\}$ genügend langsam erfolgt (3^0 ist z. B. richtig für $\mu_n = \log n$). Aus (1) folgt dann wegen 1^0 und 2^0

$$\begin{aligned} \|U[\sigma_n(\mu)]\| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot |\Delta^2 \mu_k| + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot \Delta \mu_{k+1} + \\ &+ \mu_n \|U(\sigma_n)\| = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \|U(\sigma_k)\| \cdot |\Delta^2 \mu_k| + o(1). \end{aligned}$$

Mithin gilt nach 1^0 und 3^0

$$(7) \quad \|U[\sigma_n(\mu)]\| \leq \sum_{k=1}^{n-1} O\left(\frac{|\Delta \mu_k|}{\mu_k^2}\right) + o(1).$$

Da aber die Folge $\{\mu_k\}$ monoton wächst, ferner $\{|\Delta \mu_k|\}$ wegen der Konkavität monoton abnimmt, ist

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\Delta \mu_k|}{\mu_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|\Delta \mu_{k-1}|}{\mu_{k-1} \mu_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\mu_{k-1}} - \frac{1}{\mu_k} \right) < \frac{1}{\mu_0},$$

also ergibt sich aus (7) die Abschätzung

$$(8) \quad \|U[\sigma_n(\mu)]\| = O(1).$$

Sei nun $\{\bar{\lambda}_n\}$ eine konvexe Nullfolge, für welche $\{\bar{\lambda}_n \mu_n\}$ konkav und gegen Unendlich strebend bleibt. Setzen wir $\lambda_n = \bar{\lambda}_n \mu_n$. Gehen wir dann statt der im Satz 2.2 figurierenden Reihe $\sum f_n$ von der Reihe $\sum \mu_n f_n$ aus, so muß in der Behauptung des Satzes 2.2 $\sigma_n(\mu)$ statt σ_n und $\sigma_n(\bar{\lambda})$ statt $\sigma_n(\lambda)$ stehen. Letzteres, weil $\sigma_n(\lambda)$ nichts anderes, als die $\bar{\lambda}$ -Transformierte von $\sigma_n(\mu)$ ist. Unser Satz folgt also unmittelbar aus (8) und dem Satze 2.2.

3. Die mit konvexen Nullfolgen gebildeten Transformaten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen

3.1. Wir wollen gewisse Eigenschaften der Orthogonalreihen als Anwendungen unserer vorangehenden Sätze behandeln. Das können wir leicht tun, wenn wir für den zugrunde gelegten Funktionenraum $\mathfrak{F}$ einen der folgenden wählen: den Raum L der (im Lebesgueschen Sinne) integrierbaren Funktionen, für $p > 1$ den Raum L^p der samt ihren p -ten Potenzen integrierbaren Funktionen, den Raum M der fast überall beschränkten Funktionen, den Raum C der stetigen Funktionen. $U(f)$ bedeutet dann f , d. h. die identische Transformation, also ist $\|U(f)\|$ die in $\mathfrak{F}$ gemessene Entfernung der Funktion f von der Funktion $g(x) \equiv 0$. Um die Existenz der Entwicklung $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$ zu sichern, setzen wir voraus, daß die Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ Elemente des zu $\mathfrak{F}$ konjugierten Raumes² sind. Wir werden das Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ auf einer Menge $(C, 1)$ -regulär nennen, wenn in jedem Punkte x dieser Menge (von x abhängig) die Beziehung

$$\int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt = O(1)$$

besteht.

3.2. Ist $\{\varphi_n(x)\}$ stetig und (überall) gleichmäßig $(C, 1)$ -regulär, $\{\lambda_n\}$ irgendeine konvexe Nullfolge, so gehört $\{\lambda_n\}$ zur Klasse (M, C) .³

Der zugrunde gelegte Funktionenraum sei M . Aus der vorausgesetzten gleichmäßigen $(C, 1)$ -Regularität folgt für die arithmetischen Mittel $\sigma_n(x)$ der Entwicklung von $f(x)$:

$$\max_{a \leq x \leq b} |\sigma_n(x)| = \|U(\sigma_n)\| = O(1).$$

Nach 2.2 ist somit

$$\max_{a \leq x \leq b} |\sigma_n(\lambda, x) - \sigma_m(\lambda, x)| = o(1),$$

also $\{\sigma_n(\lambda, x)\}$ gleichmäßig konvergent.

3.3 Ist $|\varphi_n(x)| \leq M_n$ und $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall $(C, 1)$ -regulär, gilt außerdem für irgendeine Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ auch

$$(9) \quad \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \mu_k \varphi_k(x) \right| dx = O(1),$$

² Der konjugierte Raum von L ist M , der von L^p ist $L^{\frac{p}{p-1}}$.

³ Dieser Satz ist für Fourierreihen bekannt, s. A. ZYGMUND, *Trigonometrical series* (Warszawa - Lwów, 1935), p. 105.

so gibt es zu jeder konvexen Nullfolge $\{\lambda_n\}$ eine Funktion $f \in L$, für welche

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \lambda_n \mu_n$$

ist.

Der zugrunde gelegte Funktionenraum sei L und wir setzen

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \mu_k \varphi_k(x).$$

Dann bedeutet (9) so viel, wie $\|U(\sigma_n)\| = O(1)$, woraus nach 2.2

$$\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$$

folgt. Diese Beziehung ist aber hinreichend⁴ für die Existenz einer Funktion $f \in L$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Bemerkung. Ist $\varphi_n(x) = \cos nx$, so gilt unser Satz auch für $\mu_n = 1$, da in diesem Fall (9) erfüllt bleibt. Setzt man aber $\varphi_n(x) = \sin nx$, so ist bekanntlich

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \sin kx \right| dx \sim \log n,$$

also für $\mu_n = 1$ weder die Bedingung (9), noch die Bedingung der $(C, 1)$ -Regularität fast überall erfüllt. Damit ist der eigentliche Grund des bekannten Satzes⁵ beleuchtet, nach welchem $\sum \lambda_n \cos nx$ für alle konvexe Nullfolgen $\{\lambda_n\}$ eine Fourierreihe ist, während $\sum \lambda_n \sin nx$ nur unter zusätzlichen Bedingungen eine Fourierreihe sein kann.

4. Die mit konkaven, gegen Unendlich konvergierenden Folgen gebildeten Transformaten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen

4.1. Gehört $\{\varphi_n(x)\}$ zum konjugierten Raum von L bzw. L^p und ist es ein fast überall $(C, 1)$ -reguläres Orthogonalsystem, so läßt sich zu der Entwicklung jeder Funktion $f \in L$, bzw. $f \in L^p$ eine gegen Unendlich konvergierende, konkave Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$, die zur Klasse (L, L) , bzw. (L^p, L^p) gehört, bestimmen.⁶

Der zugrunde gelegte Funktionenraum sei L , bzw. L^p . Bedeutet $\sigma_n^*(x)$ das n -te arithmetische Mittel der Entwicklung $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$, so gilt bekannt-

⁴ W. ORLICZ, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, I. *Studia Mathematica*, 1 (1929), pp. 1–39.

⁵ W. H. YOUNG, On the Fourier series of bounded functions, *Proc. London Math. Soc.*, 12 (1913), pp. 41–70.

⁶ Die Behauptung unseres Satzes betreffs $f \in L$ wurde — ebenfalls von der Beziehung (1) ausgehend — bewiesen von R. SALEM, Sur les transformations des séries de Fourier, *Fundamenta Mathematicae*, 33 (1945), pp. 108–114.

lich⁴ $\|U(\sigma_n^* - \sigma_m^*)\| = o(1)$, oder was damit vollständig gleichwertig ist: $\|U(\sigma_n^* - f)\| = o(1)$. Wählen wir nun die Glieder f_n der im Satze 2.3 auftretenden Reihe $\sum f_n$ folgenderweise: $f_0 = c_0 \varphi_0 - f$ und für $n \geq 1$ setzen wir $f_n = c_n \varphi_n$. Dann ist $\sigma_n = \sigma_n^* - f$, also $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$. Nach 2.3 läßt sich die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ so wählen, daß auch $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$ sei. Hier ist aber $\sigma_n(\lambda)$ die λ -Transformierte des n -ten arithmetischen Mittels der Reihe $[c_0 \varphi_0 - f] + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n + \dots$. Wenn wir also $\sigma_n^*(\lambda, x)$ für die λ -Transformierte von $\sigma_n^*(x)$ schreiben, so ist

$$\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda) = \sigma_n^*(\lambda, x) - \sigma_m^*(\lambda, x).$$

Es gilt somit

$$\|U[\sigma_n^*(\lambda, x) - \sigma_m^*(\lambda, x)]\| = o(1),$$

woraus in Verbindung mit der vorausgesetzten $(C, 1)$ -Regularität fast überall nach der öfters zitierten Arbeit des Herren ORLICZ⁴ die Existenz einer Funktion $g \in L$, bzw. $g \in L^p$ folgt, deren Entwicklungskoeffizienten die Zahlen

$$\int_a^b g(x) \varphi_n(x) dx = \lambda_n c_n$$

sind. Damit ist unser Satz bewiesen.

4.2. Es ist bekannt,⁷ daß aus der $(C, 1)$ -Regularität fast überall des Orthogonalsystems $\{\varphi_n(x)\}$ die $(C, 1)$ -Summierbarkeit fast überall der Entwicklung jeder Funktion $f \in L^2$ folgt. Auf Grund des vorangehenden Satzes läßt sich dieses Resultat — allerdings nur unter einer starken Zusatzannahme — auf die Entwicklungen der Funktionen $f \in L$ erweitern:

Ist $f \in L$, bzw. $f \in L^p$ und besitzt das fast überall $(C, 1)$ -reguläre Orthogonalsystem die Eigenschaft, daß die arithmetischen Mittel der Entwicklung jeder Funktion $f \in L$, bzw. $f \in L^p$ fast überall unter einer von x abhängenden Schranke bleiben, so ist die Entwicklung der Funktion $f(x)$ fast überall $(C, 1)$ -summierbar.

Bezeichne $\sigma_n(x)$ das n -te arithmetische Mittel der Entwicklung $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$ und $\sigma_n(\mu, x)$ seine μ -Transformierte. Nach 4.1 läßt sich die Zahlenfolge $\{\mu_n\}$ konkav und gegen Unendlich konvergierend wählen derart, daß $g(x) \sim \sum \mu_n c_n \varphi_n(x)$ ein Element des Raumes L , bzw. L^p sei. Nach Annahme gilt fast überall $|\sigma_n(\mu, x)| = O(1)$. Setzt man also

$$U[\sigma_n(\mu, x)] = \sigma_n(\mu, x)$$

für einen festen Punkt x und

$$\|U[\sigma_n(\mu, x)]\| = |\sigma_n(\mu, x)|,$$

so ist damit für ein festes x eine lineare Operation mit ihrer Norm erklärt, und zwar ist $\|U[\sigma_n(\mu, x)]\| = O(1)$ für fast alle x . Setzen wir $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$, so

⁷ S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series, I. *Studia Mathematica*, 5 (1935), pp. 24–28.

ist $\sigma_n(x)$ die λ -Transformierte von $\sigma_n(\mu, x)$, aus dem Satze 2.2 folgt mithin

$$\|U[\sigma_n(x) - \sigma_m(x)]\| = o(1)$$

für fast alle x , w. z. b. w.

Bemerkung. Es ist nicht bekannt, ob die gewünschte Schranke wenigstens für die arithmetischen Mittel der Entwicklungen einer Funktion $f \in L^p$ mit $1 < p < 2$ nicht eventuell eine Konsequenz der $(C, 1)$ -Regularität fast überall ist. Wäre die Antwort auf diese Frage bejahend, so würde sich daraus auf Grund unseres soeben bewiesenen Satzes die $(C, 1)$ -Summierbarkeit fast überall der $(C, 1)$ -regulären Entwicklungen von solchen Funktionen ergeben.

4.3. Sind die Orthogonalfunktionen $\varphi_n(x)$ stetig und besitzt das (überall) gleichmäßig $(C, 1)$ -reguläre System $\{\varphi_n(x)\}$ die Eigenschaft, daß die Entwicklung jeder stetigen Funktion gleichmäßig $(C, 1)$ -summierbar ist, so läßt sich zu jedem $f \in C$ eine zur Klasse (C, C) gehörende konkave, gegen Unendlich konvergierende Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ bestimmen.⁸

Sei C der zugrunde gelegte Funktionenraum. Setzen wir $f_0 = c_0 \varphi_0 - f$ und $f_n = c_n \varphi_n$ für $n \geq 1$, dann ist $\sigma_n = \sigma_n(x) - f(x)$, wo $\sigma_n(x)$ das n -te arithmetische Mittel der Entwicklung $f(x) \sim \sum c_n \varphi_n(x)$ bedeutet. Nach Annahme gilt dann $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$. Nach dem Satze 2.3 läßt sich daher die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ so wählen, daß auch $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$ sei. Die Entwicklung $g(x) \sim \sum \lambda_n c_n \varphi_n(x)$ ist also gleichmäßig konvergent, folglich $g(x)$ stetig.

4.4. Unsere Betrachtungen beruhen im Wesen auf der Darstellung (1) der λ -Transformierten der $(C, 1)$ -Mittel. Ähnliche Darstellungen lassen sich aber auch für (C, r) -Mittel höherer Ordnung angeben.⁹ Wenn wir statt (1) eine entsprechende Darstellung der λ -Transformierten von (C, r) -Mitteln höherer Ordnung zum Ausgangspunkt gewählt hätten, so wäre es möglich — allerdings nach langwieriger Rechnung, — die Bedingung der $(C, 1)$ -Regularität durch die weniger fordernde (C, r) -Regularität zu ersetzen. Die solcherweise erhältbaren Resultate würden jedoch prinzipiell nicht viel mehr besagen, wogegen sich die Rechnungen bedeutend komplizierter gestalten würden. Dies war der Grund, daß wir uns auf die Untersuchung der arithmetischen Mittel beschränkt haben.

(Eingegangen am 13. März 1951.)

⁸ Dieser Satz wurde für Fourierreihen von R. SALEM, a. a. O.⁶, bewiesen.

⁹ S. z. B. G. H. HARDY, *Divergent series* (Oxford, 1949), p. 129.

О ПРЕОБРАЗОВАННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Д. АЛЕКСИЧ (Будапешт)

(Резюме)

Пусть $\tilde{\mathcal{H}}$ пространство функций, где определен оператор U ; значения U относятся к некоторому пространству Банаха. Обозначим норму от $U(f)$ ($f \in \tilde{\mathcal{H}}$) следующим образом: $\|U(f)\|$. Пусть $f_n \in \tilde{\mathcal{H}}$ и σ_n обозначает арифметическую среднюю порядка n ряда Σf_n , и $\sigma_n(\lambda)$ — ряда $\Sigma \lambda_n f_n$, где $\{\lambda_n\}$ произвольная последовательность чисел. Доказываются следующие теоремы:

1. Если $\{\lambda_n\}$ выпуклая последовательность чисел, $\lambda_n \rightarrow 0$ и $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$, то $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$.

2. Если $\|U(\sigma_n)\| = o(1)$, то можно найти такую вогнутую последовательность положительных чисел стремящуюся к бесконечности, для которой $\|U[\sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda)]\| = o(1)$.

Эти две теоремы позволяют перенести ряд результатов, известных в теории рядов Фурье, на ортогональные ряды.

WINKELABWEICHUNG UND BETRAGSABWEICHUNG BEI POLYNOMEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

§ 1. Winkelabweichung

1. Die Winkelabweichung $W(c, d)$ einer analytischen Funktion $f(z)$ zwischen den Punkten c und d hat dann einen Sinn, wenn $f(c)f(d) \neq 0$ ist. Dann genügt $W(c, d)$ den Relationen

$$(1) \quad W(c, d) = \left| \arccos \frac{f(d)}{f(c)} \right| = \left| \arccos \frac{f(c)}{f(d)} \right| \quad \text{und} \quad 0 \leq W(c, d) \leq \pi.$$

Hat die Funktion $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ keine Nullstelle und ist c bzw. z ein fester bzw. beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}$, so wird das Maximum der Winkelabweichung $W(c, z)$ die *Winkelabweichung der Funktion $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ bezüglich des Punktes c* genannt.

Auf Grund dieser Definitionen gilt der Satz:

I. *Hat ein Polynom $f(z)$ n -ten Grades im Kreis $|z - c| = r$ keine Nullstelle, so ist seine Winkelabweichung im konzentrischen Kreis*

$$(2) \quad |z - c| \leq r \sin \frac{\omega}{n}, \quad 0 < \omega \leq \pi$$

bezüglich des Mittelpunktes c kleiner als ω .

Hat das Polynom $f(z)$ die Form

$$(3) \quad f(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \quad a_0 \neq 0,$$

so sind

$$\frac{f(z)}{f(c)} = \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{c - z_k} \quad \text{und} \quad \arccos \frac{f(z)}{f(c)} = \sum_{k=1}^n \arccos \frac{z - z_k}{c - z_k} = \sum_{k=1}^n \varphi_k.$$

Hier bezeichnet φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) den (mit Drehungssinn versehenen) Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{cz}$ vom Punkt z_k aus erscheint. Aus der letzten Gleichung folgt die Ungleichung

$$(4) \quad W(c, z) = \left| \arccos \frac{f(z)}{f(c)} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\varphi_k| = \sum_{k=1}^n \omega_k,$$

wo ω_k der Winkel ist, unter dem die Strecke (c, z) vom Punkt z_k erscheint.

Von den Punkten des Kreises $|z-c|=r$ aus erscheint der Kreis (2) unter dem Winkel $\frac{2\omega}{n}$, ein Halbmesser dieses Kreises unter einem Winkel $\leq \frac{\omega}{n}$. Vom Punkt z_k ($k=1, 2, \dots, n$) aus erscheint ein Halbmesser des Kreises (2) unter einem Winkel $< \frac{\omega}{n}$, weil z_k außerhalb des Kreises $|z-c|=r$ liegt. Liegt der Punkt z im Kreis (2), so ist (c, z) eine Teilstrecke eines Halbmessers des Kreises (2). Die Strecke (c, z) erscheint also vom Punkt z_k aus unter einem Winkel $\omega_k < \frac{\omega}{n}$.

Für einen Punkt z der Kreisscheibe (2) ist also $\sum_{k=1}^n \omega_k < \omega$. Damit ist der Satz I bewiesen.

2. Kennt man auch die einzelnen Nullstellen des Polynoms $f(z)$, so kann man einen größeren Bereich der Punkte z bestimmen, in denen die Winkelabweichung $W(c, z) \leq \omega$ ist [$f(c) \neq 0$].

II. Hat das Polynom $f(z)$ n -ten Grades die Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n$, ist $f(c) \neq 0$, sind $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ der Gleichung

$$(5) \quad \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \omega \quad (0 < \omega \leq \pi)$$

genügende positive Zahlen und bezeichnet W_k ($k=1, 2, \dots, n$) den Winkelraum vom Scheitel z_k und von der Öffnung $2\omega_k$, dessen Winkel $2\omega_k$ durch die Halbgerade $z_k c$ halbiert wird, so hat das Polynom $f(z)$ in jedem gemeinsamen Punkt z der Winkelräume $W_1, W_2, \dots, W_n$ eine Winkelabweichung $W(c, z) \leq \omega$.

Der Durchschnitt D von $W_1, W_2, \dots, W_n$ ist ein konvexes Vieleck. Das Polynom $f(z)$ hat also im Vieleck D bezüglich des Punktes c eine Winkelabweichung $W(c, z) \leq \omega$. In jedem inneren Punkte z von D ist $W(c, z) < \omega$.

Bezeichnen $D', D'', \dots$ die Durchschnitte von je n durch die Punkte $c, z_1, z_2, \dots, z_n$ ähnlich definierten Winkelräumen, die zu verschiedenen Lösungen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ der Gleichung (5) oder zu verschiedenen Reihenfolgen der Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ einer Lösung gehören, so hat das Polynom $f(z)$ bezüglich des Punktes c in der Vereinigungsmenge der Bereiche $D, D', D'', \dots$ eine Winkelabweichung $\leq \omega$.

Der Durchschnitt D der Winkelräume $W_1, W_2, \dots, W_n$ ist ein konvexes Vieleck, weil W_k konvex ist, und es hat höchstens $2n$ Seiten. Die Gerade einer jeden Seite geht durch mindestens eine Nullstelle des Polynoms $f(z)$.

In einem Punkt z des Winkelraumes W_k ($z \neq z_k$) ist

$$(6) \quad \left| \operatorname{arc} \frac{z - z_k}{c - z_k} \right| \leq \omega_k.$$

Das Gleichheitszeichen besteht hier dann, wenn z auf einem Schenkel von W_k liegt, also ein Randpunkt von W_k ist. In einem gemeinsamen Punkt

z der Winkelräume $W_1, W_2, \dots, W_k$ ist also

$$W(c, z) = \left| \arccos \frac{f(z)}{f(c)} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \arccos \frac{z - z_k}{c - z_k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \arccos \frac{z - z_k}{c - z_k} \right| = \sum_{k=1}^n \omega_k = \omega.$$

In einem inneren Punkt z von D ist $W(c, z) < \omega$, weil dann die Ungleichung (6) für mindestens einen Index mit Ungleichheitszeichen gilt. In einem Randpunkt z von D besteht die Gleichung $W(c, z) = \omega$ dann und nur dann, wenn z auf dem Rand sämtlicher Winkelräume W_k liegt.

Damit ist der Satz II bewiesen. Aus seinem Beweis folgt die folgende Verallgemeinerung des Satzes I:

III. Bezeichnen $z_1, z_2, \dots, z_n$ die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades, sind

$$f(c) \neq 0, \quad |z_k - c| = r_k, \quad r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > \varrho > 0$$

und genügen die positiven Winkel ϑ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) den Relationen

$$r_1 \sin \vartheta_1 = r_2 \sin \vartheta_2 = \dots = r_n \sin \vartheta_n = \varrho \quad \text{und} \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_n = \omega \leq \pi,$$

so hat das Polynom $f(z)$ im Kreis $|z - c| = \varrho$ bezüglich des Mittelpunktes c höchstens die Winkelabweichung ω . Dies gilt auch im konvexen Vieleck V , das von den Tangentenpaaren des Kreises $|z - c| = \varrho$ gebildet wird, die durch die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ gehen.

Vom Punkt z_k aus erscheint ein Halbmesser des Kreises $|z - c| = \varrho$ unter einem Winkel $\leq \vartheta_k$. Daraus folgt, daß eine Strecke (c, z) dieses Kreises oder des Vielecks V vom Punkt z_k aus unter einem Winkel $\leq \vartheta_k$ erscheint. In der Ungleichung (6) läßt sich also ω_k durch ϑ_k ersetzen. Aus dem Satz II folgt damit der Satz III.

Im Satz III besteht die Ungleichung $\omega \leq \pi$, falls $\varrho = r_n \sin \frac{\pi}{n}$ ist, weil dann $\vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_n \leq \frac{\pi}{n}$ sind.

3. Der Satz II läßt sich in der Form verallgemeinern:

IV. Hat das Polynom $f(z)$ n -ten Grades die Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n$, ist $f(c) \neq 0$, genügen die nichtnegativen bzw. positiven Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ bzw. $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ der Gleichung

$$(7) \quad \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \omega \quad (0 < \omega \leq \pi) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = 2\omega$$

und den Ungleichungen $\omega_k \leq \sigma_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) und bezeichnet W'_k bzw. W''_k ($k = 1, 2, \dots, n$) den Winkelraum vom Scheitel z_k , dessen Schenkel zur Halbgeraden $z_k c$ die Winkel ω_k und $\omega_k - \sigma_k$ bzw. $-\omega_k$ und $\sigma_k - \omega_k$ bilden, so hat das Polynom $f(z)$ bezüglich des Punktes c im Durchschnitt der Winkelräume $W'_1, W'_2, \dots, W'_n$ oder $W''_1, W''_2, \dots, W''_n$, in der Vereinigungsmenge dieser zwei Durchschnitte und auch in der Vereinigungsmenge dieser und anderer Durchschnitte von je n Winkelräumen ähnlicher Art eine Winkelabweichung $\leq \omega$.

In einem Punkt z des Winkelraumes W'_k bzw. W''_k ist

$$\omega_k - \sigma_k \leq \arccos \frac{z - z_k}{c - z_k} \leq \omega_k \quad \text{bzw.} \quad -\omega_k \leq \arccos \frac{z - z_k}{c - z_k} = \sigma_k - \omega_k.$$

In einem gemeinsamen Punkt z der n Winkelräume W'_k bzw. W''_k ist also

$$\sum_{k=1}^n (\omega_k - \sigma_k) = -\omega \leq \arccos \frac{f(z)}{f(c)} \leq \sum_{k=1}^n \omega_k = \omega$$

bzw.

$$-\sum_{k=1}^n \omega_k = -\omega \leq \arccos \frac{f(z)}{f(c)} \leq \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \omega_k) = \omega.$$

Damit ist der Satz IV bewiesen.

Die Winkelräume W'_k und W''_k sind in bezug auf die Halbgerade $z_k c$ symmetrisch. Die Vereinigungsmenge der Durchschnitte der Winkelräume W'_k bzw. W''_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ist also ein konvexes Vieleck, das bezüglich der Geraden cz_k symmetrisch ist. Im Falle $\sigma_k = 2\omega_k$ stimmen die Winkelräume W'_k , W''_k und W_k überein. Der Satz IV enthält also den Satz II in sich.

4. Der größte (c enthaltende) zusammenhängende Bereich der komplexen Ebene, in dem das Polynom $f(z)$ n -ten Grades bezüglich des Punktes c eine Winkelabweichung ω ($0 < \omega \leq \pi$) besitzt, wird von einer Lucas'schen Stelloide n -ter Ordnung begrenzt.¹

Der Ort der Punkte z in der komplexen Ebene, in denen ein Polynom $f(z)$ n -ten Grades denselben Winkel besitzt, ist eine Stelloide n -ter Ordnung. Sie hat n Asymptoten, die durch den Schwerpunkt der Nullstellen des Polynoms gehen und eine n -strahlige Windrose bilden.

Sind

$$z = x + iy, c = a + ib, f(c) \neq 0, F(z) = \frac{f(z)}{f(c)} = \frac{f(x + iy)}{f(a + ib)} = P(x, y) + iQ(x, y),$$

wo die Koeffizienten der Polynome n -ten Grades $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ reell sind, so genügen die Punkte $z = x + iy$, in denen $F(z) = |F(z)| e^{i\varphi}$ ist, der Gleichung

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

oder

$$(8) \quad S(x, y; \varphi) = \cos \varphi Q(x, y) - \sin \varphi P(x, y) = 0.$$

Die Stelloiden mit den Gleichungen

$$S(x, y; \omega) = 0 \quad \text{und} \quad S(x, y; -\omega) = 0 \quad (0 < \omega < \pi)$$

¹ Vgl. das fünfzehnte Kapitel, Geometrie der Polynome im Lehrbuch von G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven* (B. G. Teubner Leipzig und Berlin, zweite Auflage, 1910), Bd. I, S. 439–453.

haben in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ gemeinsame Punkte und teilen die Ebene in gewisse zusammenhängende Bereiche $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$, die in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ Eckpunkte haben. Enthält der Bereich $\mathfrak{B}$ den Punkt c , so ist die Winkelabweichung von $f(z)$ im Bereich $\mathfrak{B}$ bezüglich des Punktes c kleiner oder gleich ω bzw. kleiner als ω , je nachdem der Rand von $\mathfrak{B}$ dem Bereich $\mathfrak{B}$ zugerechnet bzw. nicht zugerechnet wird.

In einem inneren Punkt eines zu $\mathfrak{B}$ (längs eines Randbogens) benachbarten Bereichs $\mathfrak{B}_k$ ist $|q| > \omega$ ($q = \arg F(z)$, $|q| \neq \pi$). $\mathfrak{B}$ ist also der größte c enthaltende geschlossene Bereich, in dem das Polynom bezüglich des Punktes c eine Winkelabweichung $\leq \omega \neq \pi$ besitzt.

§ 2. Betragsabweichung

5. Die *Betragsabweichung* $B(z_0; c)$ eines Polynoms $f(z)$, das im Punkt c nicht verschwindet, zwischen den Punkten z_0 und c wird durch das Verhältnis

$$(9) \quad B(z_0; c) \equiv \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right|, \quad f(c) \neq 0$$

definiert. Im Falle $f(z_0) \neq 0$ ist also $B(z_0; c) B(c; z_0) = 1$.

Es gilt der Satz

V. Hat ein Polynom $f(z)$ n -ten Grades im offenen Kreisbereich $|z - c| < r$ bzw. $|z - c| > r$ keine Nullstelle und sind $f(c) \neq 0$, $0 < t < 1$ bzw. $t > 1$, so besteht die Ungleichung

$$(10) \quad (1 - t)^n \leq B(z_0; c) \equiv \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leq (1 + t)^n$$

bzw.

$$(11) \quad (t - 1)^n \leq B(z_0; c) \equiv \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leq (t + 1)^n$$

in jedem Punkt z_0 des abgeschlossenen Kreisbereichs $|z - c| \leq rt$ bzw. $|z - c| \geq rt$.

Ein Gleichheitszeichen gilt in der Ungleichung (10) oder (11) dann und nur dann, wenn die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ in einem Punkt ζ des Kreises $|z - c| = r$ zusammenfallen und z_0 der Schnittpunkt des Kreises $|z - c| = rt$ und der die Punkte c und ζ verbindenden Geraden ist.

In einem Punkt z der komplexen Ebene ist

$$(12) \quad \frac{f(z)}{f(c)} = \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{c - z_k} = \prod_{k=1}^n \left| 1 - \frac{z - c}{z_k - c} \right| = \prod_{k=1}^n [1 - \tau_k(z)], \quad \tau_k(z) \equiv \frac{z - c}{z_k - c}.$$

Sind

$$|z_k - c| \geq r \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad |z_0 - c| \leq rt \quad \text{und} \quad 0 < t < 1,$$

so sind

$$|\tau_k(z_0)| = \left| \frac{z_0 - c}{z_k - c} \right| \leq t, \quad 1 - t \leq 1 - |\tau_k(z_0)| \leq 1 + t \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und

$$(1-t)^n \leq \prod_{k=1}^n |1-\tau_k(z_0)| \leq \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| = B(z_0; c) \leq (1+t)^n.$$

In dieser Ungleichung besteht ein Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $|z_k - c| = r, |z_0 - c| = rt$ und entweder $\tau_k(z_0) = -t$ oder $\tau_k(z_0) = t$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ist.

Damit ist der Satz V für den Fall $0 < t < 1$ bewiesen. Ebenso kann man ihn auch für den Fall $t > 1$ beweisen.

6. Der Satz V läßt sich auf folgende Weise verschärfen:

VI. Hat ein Polynom $f(z)$ n -ten Grades die Nullstellen $z_1, z_2, \dots, z_n$ und sind

$$f(c) \neq 0, \quad \left| \frac{z_0 - c}{z_k - c} \right| = t_k < 1 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad \left| \frac{z_0 - c}{z_k - c} \right| = T_k > 1 \\ (k = m+1, m+2, \dots, n),$$

so besteht die Ungleichung

$$(13) \quad \prod_{k=1}^m (1-t_k) \prod_{k=m+1}^n (T_k-1) \leq \left| \frac{f(z_0)}{f(c)} \right| \leq \prod_{k=1}^m (1+t_k) \prod_{k=m+1}^n (T_k+1).$$

In dieser Ungleichung besteht ein Gleichheitszeichen dann, wenn die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ entweder auf die Halbgerade cz_0 oder auf ihre Verlängerung fallen.

Wegen der Annahmen des Satzes VI sind

$$(14) \quad 1-t_k \leq |1-\tau_k(z_0)| \leq 1+t_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \\ T_k-1 \leq |1-\tau_k(z_0)| \leq T_k+1 \quad (k = m+1, m+2, \dots, n).$$

Man kann also auf dem Grund der Identität (12) die Ungleichung (13) leicht einsehen. In der Ungleichung (13) besteht das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen dann, wenn jede der Ungleichungen (14) mit dem ersten bzw. zweiten Gleichheitszeichen gilt. Dann ist jede Zahl $\tau_k(z_0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) positiv bzw. negativ. Die Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n$ liegen dann auf der Halbgeraden cz_0 bzw. auf ihrer Verlängerung.

Damit ist der Satz VI bewiesen.

7. Bereiche, in denen die Betragsabweichung $B(z_0; c)$ des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades < 1 bzw. > 1 ist, lassen sich durch den folgenden Satz bestimmen.

VII. Verschwindet das Polynom $f(z)$ n -ten Grades

$$f(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n) \quad (a_0 \neq 0)$$

im Punkt c nicht, bedeuten $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ der Gleichung

$$(15) \quad |a_0| \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n = |f(c)|$$

genügende beliebige positive Zahlen und bezeichnet K_h ($h = 1, 2, \dots, n$) den Kreis $|z - z_h| = \varrho_h$, so besteht die Ungleichung $|f(z_0)| < |f(c)|$ bzw. $|f(z_0)| > |f(c)|$ in

den Punkten z_0 , die innerhalb bzw. außerhalb sämtlicher Kreise K_h ($h = 1, 2, \dots, n$) liegen, d. h. in jedem inneren Punkt z_0 des Durchschnittes D_i bzw. D_n der abgeschlossenen Kreisinneren bzw. Kreisäußeren von $K_1, K_2, \dots, K_n$ gilt die Ungleichung

$$|f(z_0)| < |f(c)| \text{ bzw. } |f(z_0)| > |f(c)|.$$

Bezeichnen $D_i, D_i', \dots$ bzw. $D_n, D_n', \dots$ die Durchschnitte der abgeschlossenen Inneren bzw. Äußeren von je n Kreisen, deren Mittelpunkte in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ liegen und deren Halbmesser ϱ_h ($h = 1, 2, \dots, n$) der Gleichung (15) genügen, und bezeichnet z_0 einen inneren Punkt der Vereinigungsmenge V_i bzw. V_n der Durchschnitte $D_i, D_i', D_i'', \dots$ bzw. $D_n, D_n', D_n'', \dots$ so ist²

$$|f(z_0)| < |f(c)| \text{ bzw. } |f(z_0)| > |f(c)|.$$

In einem inneren Punkt z_0 von D_i bzw. D_n ist

$$|z_0 - z_h| \leq \varrho_h \text{ bzw. } |z_0 - z_h| \geq \varrho_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

und mindestens eine Ungleichung gilt mit Ungleichheitszeichen. Deshalb ist

$$|f(z_0)| = |a_0| \prod_{h=1}^n |z_0 - z_h| < |a_0| \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n = |f(c)| \text{ bzw. } |f(z_0)| > |f(c)|.$$

Damit ist der Satz VII bewiesen.

8. Die Punkte z der komplexen Ebene, in denen $|f(z)| = |f(c)| \mp 0$ oder $B(z; c) = 1$ ist, liegen auf einer Lemniskate L_n n -ten Grades ($2n$ -ter Ordnung), die durch den Punkt c geht und in den Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades ihre Mittelpunkte (Brennpunkte) besitzt.³ Die Kurve L_n kann aus mehreren geschlossenen Teilen bestehen.

Bezeichnet m die Anzahl der verschiedenen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ n -ten Grades, so wird die komplexe Ebene von der Lemniskate L_n in einen mehrfach zusammenhängenden unendlichen Bereich $\mathfrak{B}_0$ und in höchstens m einfach zusammenhängende endliche Bereiche geteilt. Jeder dieser endlicher Bereiche enthält wenigstens eine Nullstelle des Polynoms $f(z)$. In einem Punkt z_0 der komplexen Ebene ist $|f(z_0)| < |f(c)|$, $|f(z_0)| > |f(c)|$ bzw. $|f(z_0)| = |f(c)|$, je nachdem z_0 auf der Lemniskate L_n , im Innern des unendlichen Bereichs $\mathfrak{B}_0$ oder im Innern eines endlichen Bereichs liegt.

(Eingegangen am 15. Dezember 1950.)

² Dieser Satz läßt sich aus den Resultaten einer früheren Arbeit von mir ableiten: GYULA SZ.-NAGY, Die Lage der A-Stellen eines Polynoms bezüglich seiner Nullstellen, *Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged*, **11** (1947), S. 147—151.

³ Vgl. die Arbeit: GYULA SZ.-NAGY, Über die allgemeinen Lemniskaten, *Acta Scient. Math. Szeged*, **11** (1949), S. 207—224.

ИЗМЕНЕНИЯ АРГУМЕНТА И МОДУЛЯ МНОГОЧЛЕНА

Д. С.-НАДЬ (Сегед)

(Р е з ю м е)

В работе доказана следующая теорема:

Пусть многочлен $f(z)$ степени n не имеет корней в окружности $|z-c| \leq r$, тогда имеем $W(c, z) \leq \omega$ ($0 < \omega \leq \pi$), если $|z-c| \leq r \sin \frac{\omega}{n}$, где

$$W(c, d) = \left| \arg \frac{f(c)}{f(d)} \right| \quad (0 \leq W(c, d) \leq \pi).$$

Кроме этого доказаны некоторые другие теоремы такого типа.

CONTRIBUTIONS TO THE REDUCTION THEORY OF THE DECISION PROBLEM

Third paper

Prefix $(x_1)(Ex_2)\dots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate

By

LÁSZLÓ KALMÁR (Szeged), corresponding member of the Academy

1. In a previous paper,¹ it has been proved that any formula of the first order predicate calculus is equivalent (as to being satisfiable or not) to some binary first order formula having a Gödel prefix²

$$(1) \quad (x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\dots(Ex_n)$$

and a matrix containing a single predicate variable. In another paper,³ I have shown that in the above statement, we can replace the prefix (1) by the prefix

$$(2) \quad (x_1)(x_2)(Ex_3)\dots(Ex_{n-1})(x_n),$$

containing three universal quantifiers just as (1), but having an advantage over (1) as to the *order* of the existential quantifiers⁴ which is 3 in (1) but only 2 in (2). In the same paper, I proposed the question whether the same holds for the prefix

$$(3) \quad (x_1)(Ex_2)\dots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$$

¹ LÁSZLÓ KALMÁR and JÁNOS SURÁNYI, On the reduction of the decision problem, second paper, Gödel prefix, a single binary predicate, *Journal of Symbolic Logic*, **12** (1947), pp. 65–73.

² See KURT GÖDEL, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **40** (1933), pp. 433–443, where an analogous reduction theorem has been proved, but saying nothing about the number of predicate variables contained in the matrix.

³ LÁSZLÓ KALMÁR, Contributions to the reduction theory of the decision problem, first paper, prefix $(x_1)(x_2)(Ex_3)\dots(Ex_{n-1})(x_n)$, a single binary predicate, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 64–73.

⁴ I. e. the number of universal quantifiers preceding, or, the number of arguments of the descriptive functions involved by, the existential quantifiers in question

too, where the order of the existential quantifiers is reduced to one.⁵ Now, I shall answer this question affirmatively by

THEOREM 1. *To any given formula of the first order predicate calculus it is possible to construct an equivalent one with a prefix of the form (3) and a matrix containing no predicate variable other than a single binary one.*

2. To prove this theorem, we cannot use the *set-theoretic* method adopted in the previous papers (loc. cit. ¹ and ³), for it is based on the fact that for any individuals x, y , there is an ordered pair p with x and y as its first and second component, respectively, which requires, when formalized, a second order existential quantifier (Ep). Therefore, we shall employ an *arithmetic* method similar to that used in an older paper⁶ where the analogous theorem for the Ackermann prefix⁷

$$(4) \quad (Ex_1)(x_2)(Ex_3)(x_4) \dots (x_n)$$

has been proved. In that paper, the set of positive integers divisible by 3 was used for the set of individuals (this can be done by the familiar Löwenheim—Skolem theorem); the pairs of individuals were replaced by the integers of the form $3k-1$, the ordered pair $\langle x, y \rangle$, $x, y \equiv 0 \pmod{3}$, being represented by $3\omega(x, y) - 1$, $\omega(i, j)$ denoting for any positive integers i, j the ordinal number of the pair (i, j) in the Cauchy enumeration of the pairs,

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), \dots$$

(The integers of the form $3k+1$ were used, besides replacing the predicates contained in the original formula, as second exemplars of the individuals, in order to make it possible to express the relations corresponding to those

⁵ A further reduction of the order of *all* existential quantifiers, viz. to zero, is impossible by CHURCH's theorem on the unsolvability of the decision problem by any recursive algorithm (ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem, *Journal of Symbolic Logic*, **1** (1936), pp. 40—41 and 101—102) and by an obviously recursive solution of the satisfiability question for first order formulae with a prefix containing no other existential quantifiers than those of order zero, see P. BERNAYS and M. SCHÖNFINKEL, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **99** (1928), pp. 342—372, especially pp. 359—360. However, the order of *some* of the existential quantifiers can be reduced to zero; hence the question arises, which is the smallest positive integer m such that to any first order formula **A** it is possible to construct another one with a prefix of the form $(Ex_1) \dots (Ex_n)(y_1)(Ex_{n+1}) \dots (Ex_{n+m})(y_2)(y_3)$ and containing a single, binary, predicate variable in the matrix, n being dependent of **A**. By a slight modification of the argument used in the present paper, we can prove that this proposition holds for $m = 50$ (and indeed, as we can prove by a further device, for $m = 48$ too), see footnote ²²; but the minimal value of m is probably much less.

⁶ LÁSZLÓ KALMÄR, On the reduction of the decision problem, first paper, Ackermann prefix, a single binary predicate, *Journal of Symbolic Logic*, **4** (1939), pp. 1—9.

⁷ See WILHELM ACKERMANN, Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **112** (1936), pp. 419—432, where the analogous theorem but saying nothing about the number of predicate variables in the matrix has been proved.

between a pair and its components, as well as the predicates figuring in the original formula, by means of a single, binary, predicate.) Thus, instead of postulating the existence of a pair $p = (x, y)$ to any individuals x, y , we can construct it as $3\omega(x, y) - 1$; this construction can be formalized by means of the recursion equations of the function $\omega(i, j)$, requiring universal quantifiers only, and by means of the Peano existence postulates for 1 and $x + 1$, playing a special rôle in the recursion equations, which require two existential quantifiers of the orders zero and one, respectively.

For our present purposes, we have to perform some modifications in this method. First, we shall use non-negative integers instead of positive ones, thus 0 instead of 1 as first integer; therefore, for non-negative integers i, j , $\omega(i, j)$ has to denote the ordinal number of the pair (i, j) in the sequence

$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), \dots$,

defined by the recursion equations

$$(5) \quad \begin{cases} \omega(0, 0) = 1, \\ \omega(0, j+1) = \omega(j, 0) + 1, \\ \omega(i+1, j) = \omega(i, j+1) + 1. \end{cases}$$

This modification serves merely for technical convenience (owing to $3 \cdot 0 = 0$ while $3 \cdot 1 = 1 + 1 + 1$). Secondly, besides of pairs, we have to operate with triads of (non-negative) integers, for we have to regard the ternary descriptive functions involved by the third-order existential quantifiers of the original formula⁸ as unary descriptive functions of triads. Thus, we need an enumerating function $\omega(i, j, k)$, analogous to $\omega(i, j)$, for triads instead of pairs. Such a function can be readily constructed by means of $\omega(i, j)$; e. g. by

$$(6) \quad \omega(i, j, k) = \omega(i, \omega(j, k) - 1).$$

Thirdly, we do not have as many universal quantifiers at disposal as needed to formalize the recursion equations of $\omega(i, j)$ as in the case of the prefix (4). Therefore, we have to use also existential quantifiers in the formalization; this is possible, because the recursion equations, being singular propositions, may be regarded as existential or universal propositions with the same right. In the case of regarding them as existential propositions, we shall need the corresponding unicity statements too; we shall see, three universal quantifiers will do for their formalization. In order to avoid existential quantifiers of the second or higher order, we shall formalize the recursion equations of the

⁸ We shall suppose that the original first order formula (to which we have to construct an equivalent one with a prefix of the form (3) and a matrix containing a single, binary, predicate variable) has a prefix of the form (1); this we can do on account of the Gödel reduction theorem quoted above. As a matter of fact, we shall suppose $n = 4$ in (1) which we can do by SURÁNYI's reduction theorem quoted in footnote ¹⁰. Owing to the complications caused by the extraordinary universal quantifier (x_n) , it is not profitable to spare use of triads by supposing that the original formula has a prefix of the form (2).

inverse functions $i = \chi_1(m), j = \chi_2(m)$ of the function $\omega(i, j)$, i. e. the unique solutions of the equation $\omega(i, j) = m$, viz.⁹

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_1(1) = \chi_2(1) = 0, \\ \chi_1(m+1) = 0 \\ \chi_2(m+1) = \chi_1(m) + 1 \end{array} \right\} \text{ if } \chi_2(m) = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_1(m+1) = \chi_1(m) + 1 \\ \chi_2(m+1) = \chi_2(m) - 1 \end{array} \right\} \text{ if } \chi_2(m) \neq 0,$$

rather than the recursion equations (5). Fourthly, we have to replace the existential quantifier of order zero by a first order one, i. e. to interchange it with the immediately following universal quantifier. We shall justify this interchange similarly as in the papers loc. cit.¹ and ³, viz. by formulating a characteristic property of the individual belonging to the existential quantifier in question (i. e., of the integer 0) and postulating the unicity of an individual having that property. For this purpose, we shall sacrifice the simplest unary predicate $\Psi(x, x)$ which can be formed by means of the single binary predicate $\Psi(x, y)$ contained in the new formula, by defining $\Psi(x, x)$ to hold if and only if $x = 0$; consequently, the characterization of the cases $x = 0, 1, 2 \pmod{3}$ will become more sophisticated, and requires some changes in the definition of $\Psi(x, y)$, in the first line for $x \equiv y \pmod{3}$.

3. After these preliminaries, let us proceed to prove our theorem. Let **A** be a first order formula to which we want to construct an equivalent one with a prefix of the form (3) and a matrix containing no predicate variable but a single binary one. By a theorem of SURÁNYI,¹⁰ we may suppose that **A** has the form

$$(8) \quad \mathbf{A} = (x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4)\mathbf{M},$$

where the matrix

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(F_1, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$$

contains the binary predicate variables $F_1, \dots, F_l$ but no others; thus, **M** is a truth-function of the $16l$ arguments $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$; $\lambda = 1, \dots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$.

⁹ For the functions ω, χ_1, χ_2 defined by (5) and (7), we can prove readily by induction that

$$\omega(\chi_1(m), \chi_2(m)) = m,$$

$$\chi_1(\omega(i, j)) = i, \chi_2(\omega(i, j)) = j$$

for any integers $m \geq 1$; $i, j \geq 0$.

¹⁰ JÁNOS SURÁNYI, A logikai függvénykalkulus eldöntés-problémájának redukciónjáról (Hungarian with German abstract: Zur Reduktion des Entscheidungsproblems des logischen Funktionenkalküls), *Matematikai és Fizikai Lapok*, **50** (1943), pp. 51–74, especially theorem 1, pp. 57–65 (and pp. 73–74 of the abstract); Contributions to the reduction theory of the decision problem, second paper, three universal, one existential quantifiers, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 261–271.

If $\mathbf{A}$ can be satisfied at all, then, by a familiar argument,¹¹ it can be satisfied over the set I of non-negative integers divisible by 3; moreover, for some predicates $\Phi_1, \dots, \Phi_l$ defined over I , and for arbitrary non-negative integers¹² $x_1, x_2, x_3 \equiv 0$, we have

$$(9) \quad \mathbf{M} \left(\Phi_1, \dots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, 3\omega \left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3} \right) \right).$$

We define a predicate $\Psi(x, y)$ on the set J of all non-negative integers as follows:

(a) For $x = 1, y = 0$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if either $x = 1, y = 0$ or $x = 3\lambda + 1, 1 \leq \lambda \leq l$, and $\Phi_\lambda(3\lambda_1(y/3), 3\lambda_2(y/3))$ holds.

(b) For $x = 0, y = 2$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $x = 3\lambda_1((y+1)/3)$.

(c) For $x = 2, y = 1$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $y = 3\lambda_2((x+1)/3) + 1$.

(d) For $y = x + 1$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $y = x + 1$.

(e) For $x = y = 0$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if $x = y = 0$.

(f) For $x = y = 1$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if one of x, y equals 1, but not both.

(g) For $x = y = 2$, $\Psi(x, y)$ holds if and only if one of x, y equals 2, but not both.

In concise form, we can tabulate the definition of $\Psi(x, y)$ as follows:¹³

		$y =$		
		0	1	2
$x =$	0	$x = y = 0$	$y = x + 1$	$y = 3\lambda_1 \left(\frac{y+1}{3} \right)$
	1	$(x-1)(y-0) \vee$ $\vee (4 - x - 3t + 1) \Phi_{t-1} \left(3\lambda_1 \left(\frac{y}{3} \right), 3\lambda_2 \left(\frac{y}{3} \right) \right)$	$(x-1)(y-1) \vee$ $\vee (x-1)(y-1)$	$y = x + 1$
	2	$y = x + 1$	$y = 3\lambda_2 \left(\frac{x+1}{3} \right) + 1$	$(x-2)(y-2) \vee$ $\vee (x-2)(y-2)$

4. In the sequel, we shall need some lemmas, the first of which is obvious by (e), (f), (g).

LEMMA 1. $\Psi(x, x)$ holds if and only if $x = 0$.

LEMMA 2. $\bar{\Psi}(x, x) \bar{\Psi}(0, x) \bar{\Psi}(x, 0)$ holds if and only if $x = 1$.

PROOF. We have $\bar{\Psi}(1, 1)$, $\bar{\Psi}(0, 1)$ and $\bar{\Psi}(1, 0)$ by (f), (d) and (a), respectively. On the other hand, for $x = 0, x \neq 0$ we have $\bar{\Psi}(0, x)$ by (e) and the

¹¹ Compare e. g. WILHELM ACKERMANN, loc. cit., especially pp. 421–422.

¹² Here and in the rest, " $a \equiv b$ " means $a \equiv b \pmod{3}$.

¹³ For simplicity, we omit the conjunction sign. Later on, we shall abbreviate conjunctions of many terms with the product sign Π .

same holds also for $x \equiv 1, x \not\equiv 1$ by (d); for $x \equiv 2$, we have $\bar{\psi}(x, 0)$ by (d); and, for $x \equiv 0$, $\bar{\psi}(x, x) \psi(0, x)$ yields a contradiction.

LEMMA 3. $\bar{\psi}(x, x) \psi(0, x) \psi(1, x)$ holds if and only if $x \equiv 2$.

PROOF. We have $\bar{\psi}(2, 2)$ by (g), $\bar{\psi}(1, 2)$ by (d) and, owing to $\chi_1(1) = 0$, $\psi(0, 2)$ by (b). On the other hand, for $x \equiv 0, x \not\equiv 0$ we have $\bar{\psi}(0, x)$ by (e) and the same holds also for $x \equiv 1, x \not\equiv 1$ by (d); for $x \equiv 2, x \not\equiv 2$, we have $\psi(1, x)$ by (d); and, for $x \equiv 0$, $\bar{\psi}(x, x) \psi(0, x)$, for $x \equiv 1$, $\bar{\psi}(x, x) \psi(1, x)$ are contradictions.

LEMMA 4. $\bar{\psi}(x, 1) \bar{\psi}(x, 2)$ holds if and only if $x \equiv 0, x \not\equiv 0$.

PROOF. For $x \equiv 0, x \not\equiv 0$, we have $\bar{\psi}(x, 1)$ by (d) and, owing to $\chi_1(1) = 1$, $\bar{\psi}(x, 2)$ by (b). On the other hand, for $x \equiv 1, x \not\equiv 1$, we have $\psi(x, 1)$ by (f) and the same holds also for $x \equiv 0$ by (d) and for $x \equiv 2$ by (c) and $\chi_2(1) = 0$. For $x \equiv 2, x \not\equiv 2$, we have $\bar{\psi}(x, 2)$ by (g) and the same holds, by (d), for $x \equiv 1$ too.

LEMMA 5. $\bar{\psi}(0, x) \psi(1, x)$ holds if and only if $x \equiv 1, x \not\equiv 1$.

PROOF. For $x \equiv 1, x \not\equiv 1$, we have $\bar{\psi}(0, x)$ by (d), and $\psi(1, x)$ by (f). On the other hand, for $x \equiv 0, x \not\equiv 0$ we have $\bar{\psi}(1, x)$ by (a) and the same holds also for $x \equiv 2, x \not\equiv 2$ by (d) and for $x \equiv 1$ by (f). For $x \equiv 0$, we have $\psi(0, x)$ by (e) and the same holds, by (b) and $\chi_1(1) = 0$, for $x \equiv 2$ too.

LEMMA 6. $\bar{\psi}(x, 0) \psi(x, 2)$ holds if and only if $x \equiv 2, x \not\equiv 2$.

PROOF. For $x \equiv 2$ we have $\bar{\psi}(x, 0)$ by (d) and, supposing $x \not\equiv 2$, also $\psi(x, 2)$ by (g). On the other hand, for $x \equiv 0, x \not\equiv 0$ we have $\bar{\psi}(x, 2)$ by (b) and $\chi_1(1) = 0$, and the same holds also for $x \equiv 1, x \not\equiv 1$ by (d) and for $x \equiv 2$ by (g). For $x \equiv 0$ we have $\bar{\psi}(x, 0)$ by (e) and the same holds, by (a), for $x \equiv 1$ too.

Let us abbreviate

$$\begin{aligned} \psi(x, x) \vee \bar{\psi}(x, r_1) \bar{\psi}(x, r_2) & \text{ to } \Theta_0(x; r_1, r_2), \\ \bar{\psi}(x, x) \bar{\psi}(r_0, x) \bar{\psi}(x, r_0) \vee \bar{\psi}(r_0, x) \bar{\psi}(r_1, x) & \text{ to } \Theta_1(x; r_0, r_1), \\ \bar{\psi}(x, x) \bar{\psi}(r_0, x) \bar{\psi}(r_1, x) \vee \bar{\psi}(x, r_0) \bar{\psi}(x, r_2) & \text{ to } \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2). \end{aligned}$$

We infer from lemmas 1 and 4, from lemmas 2 and 5 and from lemmas 3 and 6,

LEMMA 7. $\Theta_0(x; 1, 2)$ holds if and only if $x \equiv 0$,

LEMMA 8. $\Theta_1(x; 0, 1)$ holds if and only if $x \equiv 1$

and

LEMMA 9. $\Theta_2(x; 0, 1, 2)$ holds if and only if $x \equiv 2$, respectively.

Let us abbreviate

$$\{ \Theta_0(x; r_1, r_2) \Theta_1(I; r_0, r_1) \vee \Theta_1(x; r_0, r_1) \Theta_2(y; r_0, r_1, r_2) \vee \\ \vee \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \bar{\Psi}(y, r_1) \bar{\Psi}(y, r_2) \} \bar{\Psi}(x, y) \text{ to } I(x, y; r_0, r_1, r_2);$$

we have by lemmas 7, 8, 9, 4 and by (d),

LEMMA 10. $I(x, y; 0, 1, 2)$ holds if and only if $y = x + 1$.

Further, let us abbreviate

$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \Theta_0(y; r_1, r_2) \bar{\Psi}(y, x) \text{ to } X_1(x, y; r_0, r_1, r_2), \\ \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \Theta_1(y; r_0, r_1) \bar{\Psi}(x, y) \text{ to } X_2(x, y; r_0, r_1, r_2);$$

by lemmas 7, 8, 9 and by (b), (c) we have

LEMMA 11. $X_1(x, y; 0, 1, 2)$ holds if and only if $x \equiv 2$ and $y = 3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right)$,

LEMMA 12. $X_2(x, y; 0, 1, 2)$ holds if and only if $x \equiv 2$ and $y = 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$.

Finally, let us abbreviate

$$(\Psi(x, z) \sim \Psi(y, z)) (\bar{\Psi}(z, x) \sim \bar{\Psi}(z, y)) \text{ to } A(x, y; z);$$

obviously, we have then

LEMMA 13. For any non-negative integers x, z , $A(x, x; z)$ holds.

5. Let x, y, z be arbitrary non-negative integers. We shall denote by r_k ($k=0, \dots, 3l+1$); s, s', s'' ; x_ν, x'_ν ($\nu=1, 2, 3, 4$); x''_1, x'''_1 ; $y_1, y_2, y_3, y'_3, y''_3$; $p_{\mu\nu}, p'_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu=1, 2, 3, 4$) special functions depending on x (at most).

In particular, let $r_0=0, r_1=1, r_2=2$. Then we have

$$(10) \quad \Psi(r_0, r_0)$$

by lemma 1,

$$(11) \quad \bar{\Psi}(y, y) \rightarrow A(y, r_0; z)$$

by lemmas 1 and 13;

$$(12) \quad \bar{\Psi}(r_1, r_1) \bar{\Psi}(r_0, r_1) \bar{\Psi}(r_1, r_0)$$

by lemma 2,

$$(13) \quad \bar{\Psi}(y, y) \bar{\Psi}(r_0, y) \bar{\Psi}(y, r_0) \rightarrow A(y, r_1; z)$$

by lemmas 2 and 13,

$$(14) \quad \bar{\Psi}(r_2, r_2) \bar{\Psi}(r_0, r_2) \bar{\Psi}(r_1, r_2)$$

by lemma 3, finally

$$(15) \quad \bar{\Psi}(y, y) \bar{\Psi}(r_0, y) \bar{\Psi}(r_1, y) \rightarrow A(y, r_2; z)$$

by lemmas 3 and 13. By (10)–(15) the existence and the unicity of the integers 0, 1, 2 are formalized.

6. Let $s = x + 1$. We have

$$(16) \quad I(x, s; r_0, r_1, r_2)$$

by lemma 10,

$$(17) \quad I(x, y; r_0, r_1, r_2) \rightarrow J(y, s; z)$$

and

$$(18) \quad I(y, s; r_0, r_1, r_2) \rightarrow J(y, x; z)$$

by lemmas 10 and 13. By (16)–(18) the existence, unicity and admission of a unique inverse of $s = x + 1$ are formalized.

Further, let $r_k = k$ for $k = 3, \dots, 3l + 1$. We have by lemma 10,

$$(19) \quad I(r_k, r_{k+1}; r_0, r_1, r_2) \text{ for } k = 2, \dots, 3l.$$

7. We have by lemmas 7, 8, 9,

$$(20) \quad \Theta_0(x; r_1, r_2) \rightarrow \bar{\Theta}_1(x; r_0, r_1),$$

$$(21) \quad \Theta_1(x; r_0, r_1) \rightarrow \bar{\Theta}_2(x; r_0, r_1, r_2),$$

$$(22) \quad \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \rightarrow \bar{\Theta}_0(x; r_1, r_2);$$

they formalize that the cases $x = 0, x = 1, x = 2$ exclude each other.

8. Let $x_1 = 3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right)$ for $x \equiv 2$ and¹⁴ 0 for $x \not\equiv 2$; $y_1 = 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1$

for $x \equiv 2$ and 1 for $x \not\equiv 2$. By lemmas 11, 12 and 13, we have the propositions

$$(23) \quad X_1(x, y; r_0, r_1, r_2) \rightarrow J(x_1, y; z),$$

$$(24) \quad X_2(x, y; r_0, r_1, r_2) \rightarrow J(y_1, y; z)$$

and, owing to the fact that $\chi_1(m) = \chi_1(n)$ and $\chi_2(m) = \chi_2(n)$ imply $m = n$,

$$(25) \quad \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) X_1(y, x_1; r_0, r_1, r_2) X_2(y, y_1; r_0, r_1, r_2) \rightarrow J(y, x; z),$$

formalizing the unicity of $\chi_1(m)$, $\chi_2(m)$ and the admission (together) of a unique inverse. At the same time, they formalize the unicity of a pair with given components.¹⁵

9. Next, we shall formalize the recursion equations (7) for $\chi_1(m)$, $\chi_2(m)$. Omitting the double equation¹⁶ $\chi_1(1) = \chi_2(1) = 0$, we can write them as follows,

¹⁴ The definitions of x_1 and y_1 for $x \not\equiv 2$ are chosen as if we should have $\chi_1(m) = \chi_2(m) = 0$ for non-integral values of m .

¹⁵ Remember that the integer $3m - 1$ represents the pair $(3\chi_1(m), 3\chi_2(m))$, and $3\chi_2(m) + 1$ represents a second exemplar of the integer $3\chi_2(m)$; see section 2.

¹⁶ We can omit this equation for the proposition formalizing it, viz.

$$X_1(r_2, r_0; r_0, r_1, r_2) X_2(r_2, r_1; r_0, r_1, r_2),$$

or, written in full,

$$\begin{aligned} & (\bar{\psi}(r_2, r_2) \psi(r_0, r_2) \psi(r_1, r_2) \vee \bar{\psi}(r_2, r_0) \psi(r_2, r_2)) (\bar{\psi}(r_0, r_0) \vee \\ & \vee \bar{\psi}(r_0, r_1) \bar{\psi}(r_0, r_2)) \psi(r_0, r_2) (\bar{\psi}(r_2, r_2) \psi(r_0, r_2) \psi(r_1, r_2) \vee \\ & \vee \bar{\psi}(r_2, r_0) \psi(r_2, r_2)) (\bar{\psi}(r_1, r_1) \psi(r_0, r_1) \psi(r_1, r_0) \vee \bar{\psi}(r_0, r_1) \psi(r_1, r_1)) \psi(r_2, r_1), \end{aligned}$$

x denoting an arbitrary positive integer with $x \equiv 2$,

$$(26) \quad 3\chi_1\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right) = 0 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1 = 1,$$

$$(27) \quad 3\chi_2\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right) + 1 = 3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right) + 4 \quad x_1 + 4 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1 = 1,$$

$$(28) \quad 3\chi_1\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right) = 3\chi_1\left(\frac{x+1}{3}\right) + 3 \quad x_1 + 3 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1 = 1,$$

$$(29) \quad 3\chi_2\left(\frac{(x+3)+1}{3}\right) + 1 = 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 2 \quad y_1 + 3 \text{ if } 3\chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1 = 1.$$

Defining $s' = x + 2$ and $s'' = x + 3$, we have

$$(30) \quad I(s, s'; r_0, r_1, r_2) I(s', s''; r_0, r_1, r_2)$$

by lemma 10 and

$$(31) \quad X_2(x, r_1; r_0, r_1, r_2) \rightarrow X_1(s'', r_0; r_0, r_1, r_2)$$

by (26), lemmas 11 and 12. Further, defining $x'_1 = x_1 + 1$, $x''_1 = x_1 + 2$, $x'''_1 = x_1 + 3$ and¹⁷ $y_2 = x_1 + 4$, we have

$$(32) \quad I(x_1, x'_1; r_0, r_1, r_2) I(x'_1, x''_1; r_0, r_1, r_2) I(x''_1, x'''_1; r_0, r_1, r_2) I(x'''_1, y_2; r_0, r_1, r_2)$$

by lemma 10,

$$(33) \quad X_2(x, r_1; r_0, r_1, r_2) \rightarrow X_2(s'', y_2; r_0, r_1, r_2)$$

by (27) and lemma 12, and¹⁸

$$(34) \quad \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \bar{X}_2(x, r_1; r_0, r_1, r_2) \rightarrow X_1(s'', x'''_1; r_0, r_1, r_2)$$

by (28), lemmas 9, 11 and 12. Finally, defining $y_3 = y_1 + 3$, $y'_3 = y_1 + 2$ and $y''_3 = y_1 + 1$, we have

$$(35) \quad I(y_3, y'_3; r_0, r_1, r_2) I(y'_3, y''_3; r_0, r_1, r_2) I(y''_3, y_1; r_0, r_1, r_2)$$

by lemma 10 and

$$(36) \quad \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \bar{X}_2(x, r_1; r_0, r_1, r_2) \rightarrow X_2(s'', y_3; r_0, r_1, r_2)$$

is an obvious consequence of

$$\bar{\psi}(r_2, r_2) \bar{\psi}(r_0, r_2) \bar{\psi}(r_1, r_2) \bar{\psi}(r_0, r_0) \bar{\psi}(r_1, r_1) \bar{\psi}(r_0, r_1) \bar{\psi}(r_1, r_0) \bar{\psi}(r_2, r_1),$$

i. e. of (14), (10), (12) and $\bar{\psi}(r_2, r_1)$. The last of them is, again, a consequence of (22); indeed, taking r_2 for x and writing in full, (22) becomes

$$(\bar{\psi}(r_2, r_2) \bar{\psi}(r_0, r_2) \bar{\psi}(r_1, r_2) \vee \bar{\psi}(r_2, r_0) \bar{\psi}(r_2, r_2)) \rightarrow \bar{\psi}(r_2, r_2) \vee \bar{\psi}(r_2, r_1) \bar{\psi}(r_2, r_2);$$

here, the antecedent holds by (14) and the consequent can be written as

$$\bar{\psi}(r_2, r_2) (\bar{\psi}(r_2, r_1) \vee \bar{\psi}(r_2, r_2))$$

which implies obviously $\bar{\psi}(r_2, r_1)$.

¹⁷ For typographical reasons, we denote $x_1 + 4$ by y_2 rather than by x'''_1 .

¹⁸ By the definition of X_2 and by (12), the antecedent of (34) and (35) can be simplified to

$$\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \bar{\psi}(x, r_1).$$

by (29), lemmas 9 and 12. By (30)—(36), the required formalization of the recursion equations (26)—(29) has been performed.

10. Finally, we have to formalize the fact that for any triad¹⁹ (x_1, x_2, x_3) of non-negative integers x_1, x_2, x_3 divisible by 3, there is a non-negative integer $x \equiv 0$, viz. $x_4 = 3\omega\left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}\right)$, such that, on account of (9), $\mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_i; x_1, x_2, x_3, x_4)$ holds. Conforming to the representation of a pair (x, y) by $3\omega(x/3, y/3) - 1$ (x and y being non-negative integers divisible by 3), we shall represent the triad (x_1, x_2, x_3) by the integer

$$x = 3\omega(x_1/3, x_2/3, x_3/3) - 1 = 3\omega(x_1/3, \omega(x_2/3, x_3/3) - 1) - 1,$$

whence $x_1 = 3\chi_1((x+1)/3)$ and

$$(37) \quad \omega\left(\frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{3}\right) = \chi_2\left(\frac{x+1}{3}\right) + 1 = \frac{y_1+2}{3},$$

thus $x_2 = 3\chi_1((y_1+2)/3)$, $x_3 = 3\chi_2((y_1+2)/3)$. We shall adopt these equations as definitions of the functions x_2, x_3 of x and this for $x \equiv 2$ too, in which case, owing to $y_1 = 1$, we have $x_2 = x_3 = 0$; we get (37) as a consequence of these definitions. Further, we define $x_4 = 3\omega(x_1/3, x_2/3, x_3/3)$, so that we have $x_4 = x+1$ for $x \equiv 2$ (and $x_1 = 3$ for $x \equiv 2$) and thus, by lemma 10,

$$(38) \quad \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2) \rightarrow I(x, x_4; r_0, r_1, r_2).$$

Now, to make possible a formalization of $\mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_i; x_1, x_2, x_3, x_4)$ by means of the single predicate Ψ , we introduce the integers $p_{\mu\nu}$ representing the pairs (x_μ, x_ν) , viz. $p_{\mu\nu} = 3\omega(x_\mu/3, x_\nu/3) - 1$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. In particular, we have $p_{23} = 3\omega(x_2/3, x_3/3) - 1 = y_1 + 1$ by (37), hence

$$(39) \quad I(y_1, p_{23}; r_0, r_1, r_2)$$

by lemma 10. On the other hand, we have

$$x_\mu = 3\chi_1\left(\frac{p_{\mu\nu}+1}{3}\right), \quad x_\nu = 3\chi_2\left(\frac{p_{\mu\nu}+1}{3}\right) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4;$$

therefore, defining $x'_\nu = x_\nu + 1$ for $\nu = 2, 3, 4$ too²⁰, we have

$$(40) \quad I(x_\nu, x'_\nu; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \nu = 2, 3, 4$$

by lemma 10,

$$(41) \quad X_1(p_{\mu\nu}, x_\mu; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

by lemma 11, and

$$(42) \quad X_2(p_{\mu\nu}, x'_\nu; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

Here, x_1 denotes (as well as x_2 and x_3) any non-negative integer divisible by 3, not necessarily the function of x defined in section 8. Later on, it will coincide automatically again with that function.

²⁰ We defined $x'_1 = x_1 + 1$ in section 9.

by lemma 12. Finally, defining $p'_{\mu\nu} = p_{\mu\nu} + 1 - 3\omega(x_\mu - 3, x_\nu - 3)$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, we have

$$(43) \quad \Gamma(p_{\mu\nu}, p'_{\mu\nu}; r_0, r_1, r_2) \quad \text{for } \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$$

by lemma 10 and, on account of $x_\mu - 3 = \chi_1(p'_{\mu\nu} - 3)$, $x_\nu - 3 = \chi_2(p'_{\mu\nu} - 3)$ and of (a) (see section 3), we have

$$\Phi_\lambda(x_\mu, x_\nu) \sim \Psi(r_{3\lambda+1}, p'_{\mu\nu}) \quad \text{for } \lambda = 1, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

Consequently, denoting the matrix formed of $\mathbf{M}(F_1, \dots, F_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ by replacing $F_\lambda(x_\mu, x_\nu)$ throughout by $G(r_{3\lambda+1}, p'_{\mu\nu})$ for $\lambda = 1, \dots, l; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, by $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*(G; u_4, u_7, \dots, u_{3l+1}, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{44})$, we have

$$(44) \quad \mathbf{M}^*(\Psi; r_4, r_7, \dots, r_{3l+1}, p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{44}).$$

11. Now, let us form the conjunction of (10)—(25), (30)—(36), (38)—(44), replace Ψ throughout²¹ by a predicate variable G , let us bind the individual variable x by a universal quantifier, $r_0, \dots, r_{3l+1}, s, s', s'', x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{44}, p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{44}$ (regarded as individual variables) by existential quantifiers, and the individual variables y, z by universal quantifiers again²². Thus, we get a first order formula $\mathbf{B}$ whose prefix has obviously the form (3) and its matrix contains the single predicate variable G . By the above arguments, $\mathbf{B}$ can be satisfied if $\mathbf{A}$ can. To prove theorem 1, we have still to show that the converse statement holds too.

12. If $\mathbf{B}$ can be satisfied on a (non empty) set J' , then, for a suitable binary predicate Ψ defined over J' , the proposition formed of (10)—(25), (30)—(36) and (38)—(44) by replacing the individual variables $r_0, \dots, r_{3l+1}, s, s', s'', x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{44}, p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{44}$ by suitable unary descriptive functions $q_0(x), \dots, q_{3l+1}(x), \sigma(x), \sigma'(x), \sigma''(x), \xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x), \xi_4(x), \xi'_1(x), \xi'_2(x), \xi'_3(x), \xi'_4(x), \eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x), \eta'_1(x), \eta'_2(x), \eta'_3(x), \pi_{11}(x), \pi_{12}(x), \dots, \pi_{44}(x), \pi'_{11}(x), \pi'_{12}(x), \dots, \pi'_{44}(x)$, defined over J' , holds for arbitrary $x, y, z \in J'$. We shall quote the proposition formed thus by the numbers of the original propositions; similarly for some different substitutions and other modifications to be indicated later on.

²¹ Of course, in the abbreviations $\Theta_0(x; r_1, r_2), \Theta_1(x; r_0, r_1), \Theta_2(x; r_0, r_1, r_2), \Gamma(x, y; r_0, r_1, r_2), X_1(x, y; r_0, r_1, r_2), X_2(x, y; r_0, r_1, r_2), \Delta(x, y; z)$ too.

²² Of course, this is to be understood that the quantifiers are placed at the beginning of the conjunction in the order mentioned above. Interchanging the existential quantifiers $(Er_0) \dots (Er_{3l+1})$ with the general quantifier (x) , we get another formula $\mathbf{B}'$ which can be proved, by a slight modification of our proof, to be equivalent to $\mathbf{A}$. $\mathbf{B}'$ has a prefix of the form $(Ex_1) \dots (Ex_n)(y_1)(Ex_{n+1}) \dots (Ex_{n+30})(y_2)(y_3)$, mentioned in footnote 5. By a further modification, we could save two existential quantifiers by giving the rôle of x_1 and x'_1 to s and s' , respectively; thus, we should get a formula $\mathbf{B}''$, equivalent to $\mathbf{A}$, having a prefix of the form $(Ex_1) \dots (Ex_n)(y_1)(Ex_{n+1}) \dots (Ex_{n+28})(y_2)(y_3)$ (and a matrix containing a single, binary, predicate variable).

By the definition of $\Delta(x, y; z)$ we have obviously

LEMMA 14. *If, for some $x, y \in J'$, we have $\Delta(x, y; z)$ for any $z \in J'$, then we can replace x by y , and conversely, in any proposition containing the single predicate Ψ (thus, in any proposition composed, besides of Ψ , of the predicates $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Gamma, X_1, X_2, \Delta$ and $\mathbf{M}^*$, these predicates being abbreviations for some propositions formed of Ψ alone).*

13. Let ξ_0 be an arbitrary fixed element of J' . Let $\varrho_z = \varrho_z(\xi_0)$ for $z = 0, \dots, 3l+1$. We have by (10), taking ξ_0 for x ,

$$(10') \quad \Psi(\varrho_0, \varrho_0);$$

hence, by (11), $y = \varrho_0$, we infer

$$(45) \quad \Delta(\varrho_0, \varrho_0(x); z)$$

for any $x, z \in J'$. Thus, by lemma 14, we can replace r_0 by ϱ_0 (instead of $\varrho_0(x)$) in (12)–(25), (30)–(36) and (38)–(44).

Again, by (12), $x = \xi_0$, we have

$$(12') \quad \bar{\Psi}(\varrho_1, \varrho_1) \Psi(\varrho_0, \varrho_1) \Psi(\varrho_1, \varrho_0);$$

hence, by (13), $y = \varrho_1$, we infer

$$(46) \quad \Delta(\varrho_1, \varrho_1(x); z)$$

for any $x, z \in J'$. Thus, by lemma 14, we can replace r_1 by ϱ_1 (instead of $\varrho_1(x)$) in (14)–(25), (30)–(36) and (38)–(44).

Again, by (14), $x = \xi_0$, we have

$$(14') \quad \bar{\Psi}(\varrho_2, \varrho_2) \Psi(\varrho_0, \varrho_2) \Psi(\varrho_1, \varrho_2);$$

hence, by (15), $y = \varrho_2$, we infer

$$(47) \quad \Delta(\varrho_2, \varrho_2(x); z)$$

for any $x, z \in J'$. Thus, by lemma 14, we can replace r_2 by ϱ_2 (instead of $\varrho_2(x)$) in (16)–(25), (30)–(36) and (38)–(44).

14. Let us abbreviate $\Gamma(x, y; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $\Gamma(x, y)$, $\Theta_0(x; \varrho_1, \varrho_2)$ to $\Theta_0(x)$, $\Theta_1(x; \varrho_0, \varrho_1)$ to $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $\Theta_2(x)$, $X_1(x, y; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $X_1(x, y)$, $X_2(x, y; \varrho_0, \varrho_1, \varrho_2)$ to $X_2(x, y)$. Thus, we can omit the arguments after the semi-colon, except of Δ and $\mathbf{M}^*$, in (16)–(25), (30)–(36) and (38)–(44).

Now, we prove

LEMMA 15. *For any $x, y, z, u \in J'$, we have*

$$\Gamma(x, y) \Gamma(x, u) \rightarrow \Delta(u, y; z)$$

and

$$\Gamma(x, y) \Gamma(u, y) \rightarrow \Delta(u, x; z).$$

Indeed, suppose first $\Gamma(x, y)$ and $\Gamma(x, u)$. Then, we have by (17),

$$\Delta(y, \sigma(x); z) \Delta(u, \sigma(x); z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma, $\perp(u, y; z)$. Suppose secondly $\Gamma(x, y)$ and $\Gamma(u, y)$. Then, we have again, by (17), $\perp(y, \sigma(x); z)$ for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, $\Gamma(u, \sigma(x))$ which gives, by (18), $\perp(u, x; z)$ for any $z \in J'$.

As an application of lemma 15, we can prove, for any $x, z \in J'$, the proposition

$$(48) \quad \perp(\varrho_x, \varrho_x(x); z),$$

shown for $x = 0, 1, 2$ by (45), (46), (47), respectively, for $x = 3, \dots, 3l + 1$ too. Indeed, supposing (48) true for some $x, x = 2, \dots, 3l$, we have

$$\Gamma(\varrho_x, \varrho_{x+1}(x))$$

by (19) and lemma 14 and

$$(19') \quad \Gamma(\varrho_x, \varrho_{x+1})$$

by (19), $x = \xi_0$; hence, we get $\perp(\varrho_{x+1}, \varrho_{x+1}(x); z)$ by lemma 15; thus, (48) has been proved by induction.

We show that (19'), just proved for $x = 2, \dots, 3l$, holds for $x = 0$ and $x = 1$ too. Indeed, by (10'), (12') and (14') we have, remembering to the definitions of Θ_0, Θ_1 , and Θ_2 ,

$$(49) \quad \Theta_0(\varrho_0) \Theta_1(\varrho_1) \Theta_2(\varrho_2);$$

as we have $\Psi(\varrho_0, \varrho_1)$ and $\Psi(\varrho_1, \varrho_2)$ by (12') and (14'), respectively, a glance at the definition of Γ shows that $\Gamma(\varrho_0, \varrho_1)$ and $\Gamma(\varrho_1, \varrho_2)$ hold.

Defining

$$\varrho_{x+1} = \sigma(\varrho_x) \text{ for } x = 3l + 1, 3l + 2, \dots,$$

we see by (16), $x = \varrho_x$, that (19') holds for $x = 3l + 1, 3l + 2, \dots$ too.

By (19') we infer²³ from lemma 15

$$(50) \quad \Gamma(\varrho_x, y) \rightarrow \perp(y, \varrho_{x+1}; z)$$

and

$$(51) \quad \Gamma(y, \varrho_{x+1}) \rightarrow \perp(y, \varrho_x; z)$$

for $x = 0, 1, \dots$ and any $y, z \in J'$. More generally, we get

LEMMA 16. For²⁴ $x = 0, 1, \dots; v = 1, 2, \dots$ and for any $y, y', \dots, y^{(v-1)}, z \in J'$ we have

$$(52) \quad \Gamma(\varrho_x, y) \Gamma(y, y') \dots \Gamma(y^{(v-2)}, y^{(v-1)}) \rightarrow \perp(y^{(v-1)}, \varrho_{x+v}; z)$$

and

$$(53) \quad \Gamma(y, y') \Gamma(y', y'') \dots \Gamma(y^{(v-2)}, y^{(v-1)}) \Gamma(y^{(v-1)}, \varrho_{x+v}) \rightarrow \perp(y, \varrho_x; z).$$

PROOF. For $v = 1$, (52) and (53) become identical with (50) and (51), respectively. Supposing (52) for some v , we have

$$\Gamma(\varrho_x, y) \Gamma(y, y') \dots \Gamma(y^{(v-2)}, y^{(v-1)}) \Gamma(y^{(v-1)}, y^{(v)}) \rightarrow \Gamma(\varrho_{x+v}, y^{(v)})$$

²³ For $x = 3l + 1, 3l + 3, \dots$, we get (50) and (51) more directly from (17) and (18) by taking $x = \varrho_x$.

²⁴ We shall need lemma 16 for $v = 3$ and $v = 4$ only.

by lemma 14, and

$$\Gamma(\varrho_{x+v}, y^{(v)}) \rightarrow \Delta(y^{(v)}, \varrho_{x+v+1}; z)$$

by (50); hence, (52) with $v+1$ instead of v follows. Again, supposing (53) for some v and for any $y, y', \dots, y^{(v-1)}, z \in J'$, we have

$$\Gamma(y', y'') \Gamma(y'', y''') \dots \Gamma(y^{(v-1)}, y^{(v)}) \Gamma(y^{(v)}, \varrho_{x+v+1}) \rightarrow \Delta(y', \varrho_{x+1}; z);$$

therefore, by lemma 14

$$\Gamma(y, y') \Gamma(y', y'') \dots \Gamma(y^{(v-1)}, y^{(v)}) \Gamma(y^{(v)}, \varrho_{x+v+1}) \rightarrow \Gamma(y, \varrho_{x+1});$$

hence, (53) with $v+1$ instead of v follows by (51).

15. By (20), (21) and (22) we see, remembering to the definition of Γ , that

$$\Gamma(x, y) \rightarrow (\Theta_0(x) \rightarrow \Theta_1(y)) (\Theta_1(x) \rightarrow \Theta_2(y)) (\Theta_2(x) \rightarrow \bar{\psi}(y, r_1) \bar{\psi}(y, r_2));$$

hence, by

$$(54) \quad \bar{\psi}(y, r_1) \bar{\psi}(y, r_2) \rightarrow \Theta_0(y)$$

which is a consequence of the definition of Θ_0 , we have

$$\Gamma(x, y) \rightarrow (\Theta_0(x) \rightarrow \Theta_1(y)) (\Theta_1(x) \rightarrow \Theta_2(y)) (\Theta_2(x) \rightarrow \Theta_0(y)).$$

By (19'), we infer

$$(\Theta_0(\varrho_x) \rightarrow \Theta_1(\varrho_{x+1})) (\Theta_1(\varrho_x) \rightarrow \Theta_2(\varrho_{x+1})) (\Theta_2(\varrho_x) \rightarrow \Theta_0(\varrho_{x+1})),$$

which, combining with (49), gives by an obvious induction

$$(55) \quad \Theta_0(\varrho_{3v}) \Theta_1(\varrho_{3v+1}) \Theta_2(\varrho_{3v+2}) \quad \text{for } v = 0, 1, 2, \dots$$

Further, by (10') and by the definition of Θ_1 and Θ_2 (or by (49), (20) and (22)) we have

$$\Theta_1(\varrho_0) \Theta_2(\varrho_0);$$

hence, as we have $\bar{\psi}(\varrho_0, \varrho_1)$ by (12') (or as we have $\bar{\psi}(\varrho_0, \varrho_2)$ by (14')), the definition of Γ gives

$$(56) \quad \bar{\Gamma}(x, \varrho_0)$$

for any $x \in J'$.

16. Now we prove

LEMMA 17. For any $x, y, z, u, v \in J'$, we have

$$X_1(x, y) X_1(x, u) \rightarrow \Delta(u, y; z)$$

$$X_2(x, y) X_2(x, v) \rightarrow \Delta(v, y; z)$$

and

$$X_1(x, u) X_2(x, v) X_1(y, u) X_2(y, v) \rightarrow \Delta(x, y; z).$$

Indeed, supposing $X_1(x, y)$ and $X_1(x, u)$, we have by (23)

$$\Delta(\xi_1(x), y; z) \Delta(\xi_1(x), u; z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, $\Delta(u, y; z)$. Similarly, supposing $X_2(x, y)$

and $X_2(x, v)$, we have by (24)

$$A(r_1(x), y; z) A(r_1(x), v; z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, $A(r, y; z)$. Finally, supposing $X_1(x, u)$, $X_2(x, v)$, $X_1(y, u)$ and $X_2(y, v)$, we have $\Theta_2(x)$ by the definition of X_1 (or of X_2) and

$$A(\xi_1(x), u; z) A(r_1(x), v; z)$$

for any $z \in J'$; hence, by lemma 14, we have

$$X_1(y, \xi_1(x)) X_2(y, r_1(x));$$

therefore, from (25) we infer $A(y, x; z)$.

17. Now, we proceed to prove

LEMMA 18. For $v = 1, 2, \dots$ we have

$$(57) \quad X_1(\varrho_{3v-1}, \varrho_{3\chi_1(v)})$$

and

$$(58) \quad X_2(\varrho_{3v-1}, \varrho_{3\chi_2(v)+1}).$$

For $v = 1$, we have to prove $X_1(\varrho_2, \varrho_0)$ and $X_2(\varrho_2, \varrho_1)$, i. e., on account of the definitions of X_1 and X_2 , $\Theta_2(\varrho_2) \Theta_0(\varrho_0) \Psi(\varrho_0, \varrho_2)$ and $\Theta_2(\varrho_2) \Theta_1(\varrho_1) \Psi(\varrho_2, \varrho_1)$. As we have $\Theta_0(\varrho_0)$, $\Theta_1(\varrho_1)$ and $\Theta_2(\varrho_2)$ by (49) and $\Psi(\varrho_0, \varrho_2)$ by (14'), we have still to show²⁵ $\Psi(\varrho_0, \varrho_1)$. In the opposite case, i. e. $\Psi(\varrho_2, \varrho_1)$, we should have by $\Psi(\varrho_2, \varrho_2)$ (see (14')) and (54), $\Theta_0(\varrho_2)$, while, by (49) and (22), we have $\Theta_0(\varrho_1)$. Thus, we have proved (57) and (58) for $v = 1$.

Now, suppose (57) and (58) for some v ; we shall prove

$$(59) \quad X_1(\sigma''(\varrho_{3v-1}), \varrho_{3\chi_1(v+1)})$$

and

$$(60) \quad X_2(\sigma''(\varrho_{3v-1}), \varrho_{3\chi_2(v+1)+1}).$$

As we have $\Gamma(\varrho_{3v-1}, \sigma(\varrho_{3v-1}))$ by (16) and $\Gamma(\sigma(\varrho_{3v-1}), \sigma'(\varrho_{3v-1})) \Gamma(\sigma'(\varrho_{3v-1}), \sigma''(\varrho_{3v-1}))$ by (30) and therefore, $A(\sigma''(\varrho_{3v-1}), \varrho_{3v+2}; z)$ for any $z \in J'$ by lemma 16, (59) and (60) imply, by lemma 14, $X_1(\varrho_{3v+2}, \varrho_{3\chi_1(v+1)})$ and $X_2(\varrho_{3v+2}, \varrho_{3\chi_2(v+1)+1})$, i. e. (57) and (58) with $v+1$ instead of v .

Corresponding to the recursive definition of χ_1 and χ_2 , we have to distinguish between the cases $\chi_2(v) = 0$ and $\chi_2(v) \neq 0$. In the first case, we have $X_2(\varrho_{3v-1}, \varrho_1)$ by (58); hence, by (31), $X_1(\sigma''(\varrho_{3v-1}), \varrho_0)$, i. e., (59) (since $\chi_1(v+1) = 0$ by (7)); and, by (33),

$$(61) \quad X_2(\sigma''(\varrho_{3v-1}), r_{12}(\varrho_{3v-1})).$$

Now, we have

$$\begin{aligned} & \Gamma(\xi_1(\varrho_{3v-1}), \xi'_1(\varrho_{3v-1})) \Gamma(\xi'_1(\varrho_{3v-1}), \xi''_1(\varrho_{3v-1})) \\ & \cdot \Gamma(\xi''_1(\varrho_{3v-1}), \xi'''_1(\varrho_{3v-1})) \Gamma(\xi'''_1(\varrho_{3v-1}), r_{12}(\varrho_{3v-1})). \end{aligned}$$

²⁵ The following proof of $\Psi(\varrho_2, \varrho_1)$ is essentially the same as that of $\Psi(r_2, r_1)$ in footnote ¹⁶.

by (32) and

$$(62) \quad J(\xi_1(q_{3v-1}), q_{3\chi_1(v)}; z)$$

for any $z \in J'$ by (57) and (23); hence, by lemma 14,

$$(63) \quad \begin{aligned} & I(q_{3\chi_1(v)}, \xi'_1(q_{3v-1})) I(\xi'_1(q_{3v-1}), \xi''_1(q_{3v-1})) \cdot \\ & \cdot I(\xi'_1(q_{3v-1}), \xi'''_1(q_{3v-1})) I(\xi'''_1(q_{3v-1}), \iota_{12}(q_{3v-1})) \end{aligned}$$

and therefore, by lemma 16, $J(\eta_2(q_{3v-1}), q_{3\chi_1(v)+4}; z)$ for any $z \in J'$; hence, (61) gives by lemma 14, $X_2(\sigma''(q_{3v-1}), q_{3\chi_1(v)+4})$, i. e., (60) (since $\chi_2(v+1) = \chi_1(v)+1$ by (7)).

In the second case $\chi_2(v) \neq 0$, we prove first

$$(64) \quad \bar{X}_2(q_{3v-1}, q_1).$$

Indeed, in the opposite case, we should have $J(q_{3\chi_2(v)-1}, q_1; z)$ for any $z \in J'$ by (58) and lemma 17; hence, $I(q_{3\chi_2(v)}, q_1)$ by (19') ($z = 3\chi_2(v)$) and lemma 14. (51) would give then $J(q_{3\chi_2(v)}, q_0; z)$ for any $z \in J'$; hence, by (19') ($z = 3\chi_2(v)-1$) and lemma 14, we should have $I(q_{3\chi_2(v)-1}, q_0)$, contrarily to (56).

By $\Theta_2(q_{3v-1})$ (see (55)) and (64) we get from (34) and (36)

$$(65) \quad X_1(\sigma''(q_{3v-1}), \xi'''_1(q_{3v-1}))$$

and

$$(66) \quad X_2(\sigma''(q_{3v-1}), \eta_{13}(q_{3v-1})).$$

Now, we infer from lemma 16 by (63) (omitting the last conjunction term), that $J(\xi'''_1(q_{3v-1}), q_{3\chi_1(v)+3}; z)$ for any $z \in J'$; hence, (65) gives $X_1(\sigma''(q_{3v-1}), q_{3\chi_1(v)+3})$ by lemma 14, i. e., (59) (since $\chi_1(v+1) = \chi_1(v)+1$ by (7)). Again, we have

$$I(r_{13}(q_{3v-1}), r'_{13}(q_{3v-1})) I(r'_{13}(q_{3v-1}), r''_{13}(q_{3v-1})) I(r''_{13}(q_{3v-1}), \iota_{11}(q_{3v-1}))$$

by (35) and

$$(67) \quad J(r_{11}(q_{3v-1}), q_{3\chi_2(v)+1}; z)$$

for any $z \in J'$ by (58) and (24); hence, by lemma 14,

$$I(r_{13}(q_{3v-1}), r'_{13}(q_{3v-1})) I(r'_{13}(q_{3v-1}), r''_{13}(q_{3v-1})) I(r''_{13}(q_{3v-1}), q_{3\chi_2(v)+1})$$

and therefore, by lemma 16, $J(\iota_{13}(q_{3v-1}), q_{3\chi_2(v)+2}; z)$ for any $z \in J'$; hence, (66) gives $X_2(\sigma''(q_{3v-1}), q_{3\chi_2(v)+2})$ by lemma 14, i. e., (60) (since $\chi_2(v+1) = \chi_2(v)+1$ by (7)).

18. Let $I' = \{q_0, q_3, q_6, \dots\}$; we shall prove that the predicates $\Phi_1, \dots, \Phi_l$, defined over I' by

$$(68) \quad \Phi_\lambda(q_{3\mu}, q_{3\nu}) = \Psi(q_{3\lambda+1}, q_{3\omega(\mu, \nu)}) \text{ for } \lambda = 1, \dots, l; \mu, \nu = 0, 1, \dots,$$

satisfy the formula **A** on I' .

Indeed, let z_1, z_2, z_3 be arbitrary non-negative integers; let $z_4 = \omega(z_1, z_2, z_3)$ and $z_{\mu\nu} = \omega(z_\mu, z_\nu)$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, so that $z_4 = \omega(z_1, z_{23}-1)$. Choose

$x = \varrho_{3x_1-1}$. By (62) and (67), $\nu = z_1$ and so $\chi_1(\nu) = z_1, \chi_2(\nu) = z_{23} - 1$, we have

$$(69) \quad \mathcal{A}(\xi_1(x), \varrho_{3x_1}; z)$$

and

$$\mathcal{A}(\eta_1(x), \varrho_{3x_{23}-2}; z)$$

for any $z \in J'$. The last proposition shows that (39) implies, by lemma 14,

$$I(\varrho_{3x_{23}-2}, \tau_{23}(x)),$$

hence, by (50),

$$(70) \quad \mathcal{A}(\tau_{23}(x), \varrho_{3x_{23}-1}; z)$$

for any $z \in J'$; therefore, (41) and (42) with $\mu = 2, \nu = 3$ give

$$(71) \quad X_1(\varrho_{3x_{23}-1}, \xi_2(x))$$

and

$$(72) \quad X_2(\varrho_{3x_{23}-1}, \xi'_2(x))$$

by lemma 14. Now, (57) with $\nu = z_{23}, \chi_1(\nu) = z_2$ and (71) on the one hand, (58) with $\nu = z_{23}, \chi_2(\nu) = z_3$ and (72) on the other hand give by lemma 17 that

$$(73) \quad \mathcal{A}(\xi_2(x), \varrho_{3x_3}; z)$$

and

$$(74) \quad \mathcal{A}(\xi'_2(x), \varrho_{3x_3+1}; z)$$

hold for any $z \in J'$. By (74), we infer from (40) with $\nu = 3$ by lemma 14 that

$$I(\xi_3(x), \varrho_{3x_3+1})$$

holds; hence, we see by (51) that

$$(75) \quad \mathcal{A}(\xi_3(x), \varrho_{3x_3}; z)$$

holds for any $z \in J'$. Now, by $\varrho_2(\varrho_{3x_4-1})$ (see (55)) and (38) we have

$$I(\varrho_{3x_4-1}, \xi_4(x))$$

which implies, by (50),

$$(76) \quad \mathcal{A}(\xi_4(x), \varrho_{3x_4}; z)$$

for any $z \in J'$.

On account of (69), (73), (75) and (76), we infer from the first conjunction term of (32) and from (40) by lemma 14 that

$$I(\varrho_{3x_\nu}, \xi'_\nu(x)),$$

hence, by (50), that

$$(77) \quad \mathcal{A}(\xi'_\nu(x), \varrho_{3x_\nu+1}; z)$$

hold for²⁶ $\nu = 1, 2, 3, 4$ and for any $z \in J'$. By (69), (73), (75), (76) and (77), we infer from (41)⁴ and (42) by lemma 14, that $X_1(\tau_{\mu\nu}(x), \varrho_{3x_{\mu\nu}})$ and $X_2(\tau_{\mu\nu}(x), \varrho_{3x_{\mu\nu}+1})$ hold for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; on the other hand, (57) and (58) give, taking $x_{\mu\nu}$ instead of ν , $X_1(\varrho_{3x_{\mu\nu}-1}, \varrho_{3x_{\mu\nu}})$ and $X_2(\varrho_{3x_{\mu\nu}-1}, \varrho_{3x_{\mu\nu}+1})$ for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$

²⁶ For $\nu = 3$, we have shown this already; see (74).

(since $\chi_1(z_{\mu\nu}) = z_\mu$, $\chi_2(z_{\mu\nu}) = z_\nu$). Therefore, lemma 17 gives

$$\Delta(\pi_{\mu\nu}(x), \varrho_{3z_{\mu\nu-1}}; z)$$

for²⁷ $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ and for any $z \in J'$; hence, (43) gives

$$\Gamma(\varrho_{3z_{\mu\nu-1}}, \pi'_{\mu\nu}(x))$$

by lemma 14; this implies by (50)

$$(78) \quad \Delta(\pi'_{\mu\nu}(x), \varrho_{3z_{\mu\nu}}; z)$$

for $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ and for any $z \in J'$.

Now, lemma 14 shows by (48) and (78) that (44) implies

$$\mathbf{M}^*(\Psi; \varrho_4, \varrho_7, \dots, \varrho_{3l+1}, \varrho_{3z_{11}}, \varrho_{3z_{12}}, \dots, \varrho_{3z_{14}}).$$

By (68), we have

$$\Phi_\lambda(\varrho_{3z_\mu}, \varrho_{3z_\nu}) = \Psi(\varrho_{3\lambda+1}, \varrho_{3z_{\mu\nu}})$$

for $\lambda = 1, \dots, l$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$; hence, owing to the definition of $\mathbf{M}^*$, we have

$$\mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_l; \varrho_{3z_1}, \varrho_{3z_2}, \varrho_{3z_3}, \varrho_{3z_4}).$$

That is, for any $x_1 = \varrho_{3z_1}$, $x_2 = \varrho_{3z_2}$, $x_3 = \varrho_{3z_3} \in I'$, there is an $x_4 = \varrho_{3z_4} = \varrho_{3\omega(z_1, z_2, z_3)} \in I'$ so that $\mathbf{M}(\Phi_1, \dots, \Phi_l; x_1, x_2, x_3, x_4)$ holds; therefore, the predicates (68) satisfy **A** on the set I' , and so our theorem 1 holds.

19. We observe that z does not figure in **B** unless as third argument of $\Delta(x, y; z)$; on the other hand, the predicate

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \text{true} & \text{for } x = y \\ \text{false} & \text{for } x \neq y \end{cases}$$

shares all the properties of $\Delta(x, y; z)$ used in the above reasoning. Hence, denoting by **C** the formula formed of the conjunction of (10)—(25), (30)—(36), (38)—(44) by replacing $\Delta(x, y; z)$ throughout by $\Delta(x, y)$ and²⁸ Ψ by a predicate variable G , finally, binding x by a universal quantifier, $r_0, \dots, r_{3l+1}$, $s, s', s'', x_1, x_2, x_3, x_4, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, y_1, y_2, y_3, y'_3, y''_3, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{44}, p'_{11}, p'_{12}, \dots, p'_{44}$ by existential quantifiers and y by a universal again²⁹, we see that **C** is equivalent³⁰ to **A**. Thus, we have the following theorem, refining some results of PEPIS³¹.

²⁷ For $\mu = 2, \nu = 3$, we have shown this already; see (74).

²⁸ Of course, after replacing $\Theta_0(x; r_1, r_2)$, $\Theta_1(x; r_0, r_1)$, $\Theta_2(x; r_0, r_1, r_2)$, $\Gamma(x, y; r_0, r_1, r_2)$, $X_1(x, y; r_0, r_1, r_2)$ and $X_2(x, y; r_0, r_1, r_2)$ by their expressions by means of Ψ .

²⁹ See footnote ²², first sentence.

³⁰ I. e., if **A** can be satisfied, then **C** can be satisfied too, and conversely. The proposition "**C** can be satisfied" is to be understood to mean that there is a domain of individuals J and a binary predicate Ψ defined over J so that replacing G by Ψ , defining $\Delta(x, y)$ over J as above and taking J as range of the quantifiers, **C** becomes true.

³¹ JÓZEF PEPIS, a) Beiträge zur Reduktionstheorie des logischen Entscheidungsproblems, *Acta Sci. Math.*, 8 (1936—37), pp. 7—41, especially theorems 38 and 39, pp. 37—41; b) Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Fundamenta Math.*, 30 (1938), pp. 257—348, especially theorem 33, p. 319. In PEPIS's theorem, on the one hand, we have a more complicated prefix instead of (79), viz. $(x_1)(Ex_2) \dots (Ex_{n-2})(x_{n-1})$

THEOREM 2. *To any given first order formula it is possible to construct an equivalent one with a prefix of the form*

$$(79) \quad (x_1)(Ex_2)\dots(Ex_{n-1})(x_n)$$

and a matrix containing, besides the fixed "identity predicate" $\Delta(x, y)$, no predicate variable other than a single binary one.

THE BOLYAI INSTITUTE, UNIVERSITY OF SZEGED

(Received 8 May 1950)

(Ex_n) (and, in theorem 39 of the paper *a*), $(Ex_1)(x_2)(Ex_2)\dots(Ex_{n-2})(x_{n-1})(Ex_n)$), on the other hand, the number of predicate variables is greater, viz. in theorem 38 of the paper *a*), we have two binary and three unary predicate variables, in theorem 33 of the paper *b*), we have two binary and one unary predicate variable, and in theorem 36 of the paper *a*), two binary predicate variables (besides of the fixed identity predicate $\Delta(x, y)$).

ВКЛАДЫ В ТЕОРИЮ ПРИВЕДЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ
Третья статья. Префикс вида $(x_1)(Ex_2) \dots (Ex_{n-2})(x_{n-1})(x_n)$ единственный,
двухпеременный предикат

Л. КАЛЬМАР (Сегед)

(Резюме)

В вышедшей под этим же заголовком первой статье автор доказал, что проблема разрешимости узкого логического исчисления предикатов может быть приведена к вопросу выполнимости таких логических формул, префикс которых имеет вид $(x_1)(x_2)(Ex_3) \dots (Ex_{n-1})(x_n)$ и которые содержат лишь одну двухпеременную логическую переменную функцию. Этот результат является обобщением результатов, достигнутых автором совместно с Я. Шуран, относительно префикса Геделя $(x_1)(x_2)(x_3)(Ex_4) \dots (Ex_n)$, так как экзистенциальные кванторы доказанного префикса выражают существование лишь двухпеременных математических функции, в то время, как экзистенциальные кванторы, встречающиеся в префиксе Геделя предполагают существование некоторых трёхпеременных функций. В настоящей работе автор идёт ещё дальше в том же направлении, доказывая, что проблема разрешимости может быть приведена к вопросу выполнимости таких логических формул, префикс которых имеет вид указанный в подзаголовке и в которых встречается так же всего одна логическая переменная функция. Доказательство этого уже нельзя провести при помощи метода теории множеств, использованного в первой статье, заменением переменной, встречающейся в двух общих кванторах префикса Геделя, упорядоченной парой, ибо упорядоченная пара, как функция двух своих компонент, двухпеременная математическая функция. Вместо этого автор изменяет арифметический метод, встречающийся в одной из его предыдущих работ (Journal of Symbolic Logic, 4ый том) так, что в место упорядоченных пар натуральных чисел формализуются рекурсивные определение тех функций, относящихся к некоторому упорядоченных троек, которые выражают 3 компоненты упорядоченной тройки чисел при помощи номера полученного при подсчёте. Так как это функция одного переменного, можно достичь того, что в префиксе некоторый общий квантор опережает экзистенциальные кванторы. Если кроме встречающейся в формуле двухпеременной логической функции допустим ещё предикат $x = y$, то можно опустить и последний общий квантор.

ON CARLSON'S THEOREM IN THE THEORY OF THE ZETA-FUNCTION OF RIEMANN

By

P. TURÁN (Budapest), corresponding member of the Academy

§ 1. Introduction

1. It is well known the mysterious role played by the zeros of the zeta-function of RIEMANN in theory of the distribution of the primes. This function, defined on the complex $s = \sigma + it$ plane for $\sigma > 1$ by the series

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots,$$

is such that $\zeta(s) = \frac{1}{s-1}$ can be continued analytically over the whole plane and $\zeta(s)$ has an infinity of zeros in the strip $0 < \sigma < 1$ and moreover at $s = -2n$ ($n = 1, 2, \dots$). The former type of zeros, called non-trivial zeros and denoted by $\rho = \sigma_\rho + it_\rho$, are particularly important in the prime-number theory and many attempts had been made to prove RIEMANN's famous conjecture according to which all these zeros lie on the line $\sigma = \frac{1}{2}$. Even the meager assertion, the existence of a numerical θ with $\frac{1}{2} < \theta < 1$ such that $\zeta(s) \neq 0$ for $\sigma > \theta$, is unproved so far. After many attempts the mathematicians set smaller goals. BOHR and LANDAU¹ took the initiative by proving that „almost all“ non-trivial zeros lie „near“ to $\sigma = \frac{1}{2}$. More exactly, if $N(\sigma_0, T)$ denotes the number of the zeros in the domain

$$\sigma_0 \leq \sigma < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

then for every fixed $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ and $T \rightarrow \infty$ we have

$$(1.1.1) \quad N(\sigma_0, T) = o(T);$$

¹ For all results mentioned in § 1 which are now classical, one may consult TITCHMARSH's excellent book *The zeta-function of Riemann*, Cambr. Tracts in Math. and Math. Phys., No. 26. Hence only those results will be explicitly quoted which are of later origin.

this is to be compared with the fact that the whole number $N(T)$ of the zeros in the strip $0 < \sigma < 1$ between $t = 0$ and $t = T$ is $\sim \frac{1}{2\pi} T \log T$. In the estimation (1.1.1) the value of σ_0 is unessential; CARLSON¹ improved it to

$$(1.1.2) \quad N(\sigma_0, T) = O(T^{\frac{1}{2}\sigma_0(1-\sigma_0)+\delta})$$

for arbitrarily small positive δ , if $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ is fixed and $T \rightarrow \infty$. One observes that for $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$ the exponent is < 1 and is decreasing if σ_0 increases. It seemed for a long time as if results of this type, however important, have no number-theoretic applications. It was HOHEISEL² the first who starting from (1.1.2) or rather from the estimation

$$(1.1.3) \quad N(\sigma_0, T) = O(T^{4\sigma_0(1-\sigma_0)} \log^6 T)$$

improved by him, which is valid uniformly for $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$, obtained estimations for the difference of consecutive primes which seemed unattainable before. He proved first the existence of a numerical $\vartheta < 1$ such that

$$p_{n+1} - p_n < p_n^\vartheta,$$

where p_n denotes the n^{th} prime. The analysis of his method due to INGHAM³ showed—using instead of LITTLEWOOD'S estimation of a zero-free domain of $\zeta(s)$ a new one due to TCHUDAKOFF⁴ based on VINOGRADOFF'S estimation—that as to what the upper estimation of $(p_{n+1} - p_n)$ concerns, essential is only an estimation of the type

$$(1.1.4) \quad N(\sigma_0, T) = O(T^{\lambda(1-\sigma_0)} \log^z T)$$

with positive numerical λ and z , valid uniformly for $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$; then one can obtain

$$(1.1.5) \quad p_{n+1} - p_n < p_n^{1 - \frac{1}{\lambda} + \varepsilon}$$

with an arbitrarily small positive ε . The estimation (1.1.3) of CARLSON-HOHEISEL gives $\lambda = 4$, $z = 6$ as admissible values and hence

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{3}{4} + \varepsilon}, \quad n > n_0(\varepsilon).$$

² G. HOHEISEL, Primzahlprobleme in der Analysis, *Berliner Sitzungsberichte*, 1930, pp. 580—588.

³ A. E. INGHAM, On the difference between consecutive primes, *Quart. Journ. of Math., Oxford Ser.*, **8** (1937), pp. 255—266.

⁴ N. G. TCHUDAKOFF, On the zeros of Dirichlet's L -functions, *Rec. Math. (Moscou)*, Nouv. Sér., **1** (43) (1936), pp. 591—602.

2. Hence it became important to prove estimations of type (1.1.4) with a possibly small λ . Owing to

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T \log T} N\left(\frac{1}{2}, T\right) > 0$$

we have evidently

$$\lambda \geq 2.$$

TITCHMARSH'S¹ improvement

$$N(\sigma_0, T) = O(T^{\frac{4}{3-2\sigma_0}(1-\sigma_0)+t}),$$

though better for all $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$ than CARLSON'S estimation, gives again $\lambda = 4$ only. INGHAM³ succeeded in proving the estimation

$$(1.2.1) \quad N(\sigma_0, T) = O(T^{g(\sigma_0)(1-\sigma_0)} \log^5 T),$$

uniformly for $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, where $g(\sigma_0)$ is defined for any fixed $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 < 1$ by

$$(1.2.2) \quad g(\sigma_0) = \min(2 + 4\alpha, 1 + 2\sigma_0);$$

here α means a constant for which

$$(1.2.3) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^\alpha), \quad t \rightarrow \infty$$

is true. Using the value $\alpha = \frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{4}$, which is admissible according to HARDY and LITTLEWOOD, he obtained $\lambda = \frac{8}{3} + \varepsilon$, i. e.

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{5}{8} + \varepsilon}, \quad n > n_1(\varepsilon).$$

If one supposes the truth of the unproved hypothesis of LINDELÖF, according to which

$$\zeta(\sigma + ti) = O(t^\varepsilon), \quad \sigma \geq \frac{1}{2}$$

for arbitrarily small positive ε , then we get

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad n > n_2(\varepsilon),$$

a result, which is essentially the same as that of H. CRAMÉR⁵ who used however the (stronger) hypothesis of RIEMANN. The latest improvement of INGHAM⁶

$$N(\sigma_0, T) = O(T^{g_1(\sigma_0)(1-\sigma_0)} \log^5 T),$$

⁵ H. CRAMÉR, Some theorems concerning prime numbers, *Arkiv för Mat. Astr. och Fys.*, **15** (1920), no. 5.

⁶ A. E. INGHAM, On the estimation of $N(\sigma, T)$, *Quart. Journ. of Math., Oxford ser.*, **11** (1940), pp. 291–292.

where

$$(1.2.4) \quad g_1(\sigma_0) = \min \left(2 + 4\alpha, \frac{3}{2 - \sigma_0} \right)$$

gives no improvement of λ ; the same can be told of the estimation of A. SELBERG⁷ which constitutes an improvement only near to the line $\sigma = \frac{1}{2}$. The importance of estimations of CARLSON'S type was even enhanced by the remarkable discoveries of U. V. LINNIK. He found first that after extending them suitably to DIRICHLET'S L -functions, they play an essential role also in the additive prime-number-theory. Using them he could prove the theorem of VINOGRADOFF-GOLDBACH, making passable the way opened first by HARDY and LITTLEWOOD which seemed to be hopeless after their wonderful attempt. Having possibility to obtain better remainder-terms by this method the way is paved for investigating finer questions of the additive prime-number theory. He found further that such estimations play an important role also in the equidistribution-theory of the primes.

3. Hence the importance of such estimations is clear. In what follows I shall improve all the former estimations about $N(\sigma_0, T)$ in a region where they are, in a certain sense, the most critical and deep. This region is "near" to $\sigma_0 = 1$. More exactly I shall prove the following

THEOREM I. *There are sufficiently large C_1, C_2 and sufficiently small B numerical positive constants such that for $1 - B < \sigma_1 < 1$ and $T > C_1$, we have⁸*

$$(1.3.1) \quad N(\sigma_1, T) < C_2 T^{2(1-\sigma_1) + 600(1-\sigma_1)^{\frac{101}{100}}} \log^6 T.$$

This estimation asserts, roughly speaking, that here we have

$$N(\sigma_1, T) = O(T^{(2+\epsilon)(1-\sigma_1)} \log^6 T).$$

As already mentioned, this estimation, if proved for $\frac{1}{2} < \sigma_1 < 1$, would imply

$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n^{\frac{1}{n+1}}\right)$. Now the very interesting question arises whether or not theorem I implies $p_{n+1} - p_n = O\left(p_n^{\frac{1}{n+1-\epsilon}}\right)$. I shall return to this subject in another paper.

4. As mentioned, INGHAM deduced from LINDELÖF'S hypothesis the inequality

$$(1.4.1) \quad N(\sigma_1, T) = O(T^{(2+\epsilon)(1-\sigma_1)} \log^5 T),$$

⁷ A. SELBERG, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, *Arch. f. Math og Naturv.*, **48** (1946), pp. 89–155.

⁸ Combining this estimation with INGHAM'S estimation (1.2.4) the best known estimation of $(p_{n+1} - p_n)$ could be improved a little. We laid no stress on replacing the term $600(1-\sigma_1)^{\frac{101}{100}}$ by a smaller one.

valid uniformly for $\frac{1}{2} < \sigma_1 < 1$. If one supposes the truth of LINDELÖF'S hypothesis only for $\sigma \geq \Theta$ with $\frac{1}{2} < \Theta < 1$, then INGHAM'S method cannot give the inequality (1.4.1) for $\sigma_1 = \Theta$. A suitable modification of my proof of theorem I gives the following

THEOREM II. *If there is a $\frac{1}{2} < \Theta < 1$ such that with an arbitrarily small positive ε for*

$$\sigma \geq \Theta, \quad t \geq D_1 = D_1(\varepsilon)$$

we have the estimation

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq t^\varepsilon,$$

then with a suitable $D_2(\varepsilon)$ for

$$T \geq 2, \quad \sigma_1 = \Theta + \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

we have the estimation

$$N(\sigma_1, T) \leq D_2(\varepsilon) T^{2(1+3\varepsilon^{\frac{1}{2}})(1-\sigma_1)} \log^6 T.$$

We shall not give the details of the proof of this theorem, though LINDELÖF'S hypothesis comes in in a way, which differs completely from INGHAM'S argument.

5. Since the proof of theorem I is rather intricate, it is perhaps not superfluous to say a few words about it. The first ideas of it are contained in a paper⁹ from 1941, but I did not have at that time the proof of the most important lemma III of this paper, only that of lemma II. I started at that time from the identity

$$(1.5.1) \quad (-1)^v \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(v)} = \\ = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} \log^v n = v! \left(\frac{1}{(s-1)^{v+1}} - \sum_p \frac{1}{(s-p)^{v+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)^{v+1}} \right),$$

valid for $\sigma > 1$, as well as from the observation that fixing $s = s_1$ in this half-plane so that it be nearer to the imaginary axis than to the point $s = 1$ and forming the expression

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{\frac{1}{v!} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(v)} \right|_{s=s_1}}, \quad s_1 = \sigma_1 + it_1$$

which measures the domain of regularity around s_1 , we obtain $\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ if we

⁹ P. TURÁN. Über die Verteilung der Primzahlen I, *Acta Sci. Math Szeged*, **10** (1941), pp. 81–104.

replace heuristically $\zeta(s)^{(v)}$ by its quadratic mean-value taken along the vertical line $\sigma = \sigma_1$. Hence, if σ_1 is „large“ and this operation is justified for a „dense“ set on $\sigma = \sigma_1$, then the corresponding regularity-circles of $\zeta'(s)$ overlap „almost“ the whole half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$. In order to replace this heuristical reasoning by a correct one, I restricted t by $T \leq t \leq 2T$, choosed σ_1 „large“ as a function of T and confined v to a „short“ interval depending upon T ; the investigation of

$$(1.5.2) \quad \int_T^{2T} \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_1 + it)^{(v)} \right|^2 dt$$

showed that for a fixed v the quantity $\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(v)} \right|$ is „small“ on the segment

$$\sigma = \sigma_1, \quad T \leq t \leq 2T,$$

except a set E_v of „small“ measure. Since the number of the v 's is small, the union E of the E_v 's is again small; thus on the complementary set E of E , $\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(v)} \right|$ is small for every permissible choise of v . The second representation of $(-1)^v \frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(v)}$ in (1.5.1) gave further the possibility of expressing this result in terms of non-trivial zeros of $\zeta(s)$ and, using the hypothesis by which I substituted at that time the lemma corresponding to lemma III of the present paper, I obtained after a suitable choice of v the estimation

$$N(\sigma_0, T) = O(T^{2(1-\sigma_0)} \exp(13 \log^{0.18} T))$$

uniformly for $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$. The hypothesis asserted roughly that consecutive power-sums of n complex numbers $z_1, z_2, \dots, z_n$ cannot all be „small“. The new steps of the present paper compared with the paper⁹ after having lemma III are the recognition that s must be chosen near to the line $\sigma = 1$ in the half-plane $\sigma > 1$ and that a more suitable start can be made from the identity

$$(1.6.1) \quad \sum_{\omega} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \log^v \frac{n}{\omega} = v! \left(\frac{\omega^{1-s}}{(s-1)^{v+1}} - \sum_q \frac{\omega^{q-s}}{(s-\sigma)^{v+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{-2n-s}}{(s+2n)^{v+1}} \right),$$

where $\sigma > 1$ and ω is large, since the factors ω^{q-s} make the contribution of the σ 's with smaller real part less relevant. All these were used in another paper¹⁰ for proving equivalence theorems concerning RIEMANN'S hypothesis;

¹⁰ P. TURÁN, On Riemann's hypothesis, *Bull. de l'Acad. des Sciences de l'URSS, Sér. math.*, **11** (1947), pp. 97–262. I realised only later that the equivalence theorem can be deduced also from the simpler identity (1.5.1). This is definitely *not* the case with theorem I of the present paper.

hence the present paper can be considered as a child from the marriage of my papers⁹ and¹⁰. However no knowledge of the quoted papers is supposed, only some classical properties of $\zeta(s)$ which can be found e. g. in¹.

6. I remark that there is a possibility of improving theorem I, again near to $\sigma = 1$. Namely the result depends upon the measure of the set E defined above and estimated by the quadratic mean-value (1.5.2). Taking another type of mean-value, the measure of E can perhaps be diminished. Another type of possible further application of the method is the investigation of the "small" zeros of the L -functions of DIRICHLET. I intend to return to both subjects in another paper.

7. Concerning the lemmas of § II, I remark the following. In the case of equal d_r 's they are contained in a slightly weaker and different form in my paper¹⁰. I used later the general form of lemma I in a series of applications; see e. g. my lecture at the Meeting of the Czechoslovakian and Polish Mathematical Associations in Prague entitled *On a new method in the analysis with applications* delivered on 3 Sept. 1949. Lemma III in its general but slightly weaker form is announced without proof at the end of the paper¹⁰; although I need it in this paper only in the case of equal d_r 's, I shall prove it in § II in its general form owing to some further intended applications. Even the improvement of the numerical constant is of significance in an application concerning algebraic equations. I remark further that it would be desirable to improve the dependence of the lower estimation on the d_r 's.

8. As far as I know, A. SELBERG¹¹ was the first who investigated the expression

$$(1.8.1) \quad N(\sigma_1, T+U) - N(\sigma, T)$$

where $U > T''$, $\sigma_1 > \frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{2}$. He proved with this restriction that

$$(1.8.2) \quad N(\sigma, T+U) - N(\sigma, T) = O\left(\frac{U}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

uniformly for $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Obviously he was interested in estimating the expression (1.8.1) near to $\sigma_1 = \frac{1}{2}$; our method, which works well near to $\sigma = 1$, gives in this range much sharper estimations than (1.8.2) and even the restriction $U > T''$, $a > \frac{1}{2}$ can be made essentially milder. We shall however not go into details in this paper,

¹¹ A. SELBERG, On the zeros of Riemann's zeta-function, *Skifter d. Norske Vid. Akad. Oslo*, I. Mat. Naturv. Klasse, No. 10 (1942).

9. In what follows we shall use three sequences of constants. The first is denoted by $a_1, a_2, \dots$; they are numerical constants. The second is the sequence b ; instead of such sentences "true for all sufficiently small values of the positive variable x " we shall write shortly "true for $x < b$." In this case b does not mean of course the same constant. Similarly such sentences as "true for all sufficiently large values of the variable y " will be abbreviated "true for $y > c$ "; this will be the third sequence of numerical constants. The complex variable will be denoted by $s = \sigma + it$, except in § IV in the proofs of lemmas X and IX where s occurs as a fixed parameter, further in § II and in § VII; here the complex variable will be denoted by $w = u + iv$.

Finally we mention two elementary inequalities which will be used often. They are

$$(1.9.1) \quad \left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{1}{e} n!$$

and

$$(1.9.2) \quad (2n)! < 4^n \cdot n!^2.$$

§ II. Lemmas on power-sums of complex numbers

1. LEMMA 1. Let $0 < K < 1$ and $z_1, z_2, \dots, z_k$ denote complex numbers ($k > 1$) such that

$$(2.1.1) \quad \min_{j=1, 2, \dots, k} |z_j| \geq K.$$

Then for all $m \geq 1$ we have

$$M_1 = \max_{\substack{m \leq \nu \leq m+k \\ \nu \text{ integer}}} |d_1 z_1^\nu + d_2 z_2^\nu + \dots + d_k z_k^\nu| \geq |d_1 + \dots + d_k| K^m \left(\frac{K}{1+K} \cdot \frac{k}{e(m+k)} \right)^k.$$

For the proof first we suppose that m is an integer. With the above z_j 's we form the expressions

$$(2.1.2) \quad f_1(w) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{w}{z_j}\right) = \sum_{j=0}^k d_j^{(1)} w^j, \quad d_0^{(1)} = 1,$$

$$(2.1.3) \quad f_2(w) = \frac{1}{f_1(w)} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{1 - \frac{w}{z_j}} = \sum_{j=0}^{\infty} d_j^{(2)} w^j, \quad |w| < K, \quad d_0^{(2)} = 1,$$

$$s_m \left(\frac{1}{f_1} \right) = \sum_{j=0}^m d_j^{(2)} w^j,$$

$$(2.1.4) \quad f_3(w) = 1 - f_1(w) s_m \left(\frac{1}{f_1} \right) = \sum_{j=0}^{m+k} d_j^{(3)} w^j.$$

It is easy to see that

$$d_0^{(3)} = d_1^{(3)} = \dots = d_m^{(3)} = 0,$$

i. e.,

$$(2.1.5) \quad f_3(w) = \sum_{j=m+1}^{m+k} d_j^{(3)} w^j.$$

From (2.1.2), (2.1.4) and (2.1.5) we have

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} d_j^{(3)} z_v^j = 1 \quad (v = 1, 2, \dots, k).$$

Multiplying by d_v and summing with respect to v , with the notation

$$f(x) = \sum_{v=1}^k d_v z_v^x$$

we obtain the identity

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} d_j^{(3)} f(j) = d_1 + d_2 + \dots + d_k.$$

From this identity — putting

$$\max_{\substack{m+1 \leq j \leq m+k \\ j \text{ integer}}} |f(j)| = M'_1 (\leq M_1)$$

— we obtain the inequality

$$(2.1.6) \quad |d_1 + \dots + d_k| \leq M'_1 \sum_{j=m+1}^{m+k} |d_j^{(3)}|.$$

Now we need upper bounds for the numbers $d_j^{(1)}$, $d_j^{(2)}$ and $d_j^{(3)}$. Obviously we have

$$(2.1.7) \quad \sum_{j=0}^k |d_j^{(1)}| \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{|z_j|}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{K}\right)^k.$$

Further from the identity

$$\begin{aligned} d_j^{(2)} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=j \\ i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots, i_k \geq 0}} z_1^{-i_1} z_2^{-i_2} \dots z_k^{-i_k}, \\ |d_j^{(2)}| &\leq \frac{1}{K^j} \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_k=j \\ i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots, i_k \geq 0}} 1 = \frac{1}{K^j} \text{ coeffs. } z^j \text{ in } \frac{1}{(1-z)^k} = \\ &= \frac{1}{K^j} \binom{-k}{j} (-1)^j = \frac{1}{K^j} \binom{k+j-1}{k-1}, \end{aligned}$$

we get

$$(2.1.8) \quad \sum_{j=0}^m |d_j^{(2)}| \leq \frac{1}{K^m} \sum_{j=0}^m \binom{k+j-1}{k-1} = \frac{1}{K^m} \binom{m+k}{k}.$$

Since $d_j^{(3)}$ is a sum of terms of the form $d_i^{(1)} d_i^{(2)}$, from (2.1.7) and (2.1.8) we have obviously

$$\sum_{j=m+1}^{m+k} |d_j^{(3)}| < \left(\sum_{j=0}^k |d_j^{(1)}| \right) \left(\sum_{j=0}^m |d_j^{(2)}| \right) \leq \frac{(1+K)^k}{K^{m+k}} \binom{m+k}{k}$$

or from (2.1.6) and (1.9.1)

$$(2.1.9) \quad M'_1 \equiv |d_1 + \dots + d_k| \frac{K^{k+m}}{(1+K)^k} \frac{1}{\binom{m+k}{k}} > |d_1 + \dots + d_k| \frac{K^{k+m}}{(1+K)^k} \frac{k!}{(m+k)^k} > \\ > |d_1 + \dots + d_k| K^m \left(\frac{K}{1+K} \cdot \frac{k}{e(m+k)} \right)^k$$

what is our assertion for integer m .

If m is an arbitrary real number ≤ 1 , then applying (2.1.9) with $[m]$ instead of m we obtain

$$M_1 = \max_{\substack{m \leq j \leq m+h \\ j \text{ integer}}} |f(j)| \geq \max_{\substack{[m] \leq j \leq [m]+h \\ j \text{ integer}}} |f(j)| = M'_1 > \\ > |d_1 + \dots + d_k| K^{[m]} \left(\frac{K}{1+K} \cdot \frac{k}{e([m]+k)} \right)^k \geq \\ \geq |d_1 + \dots + d_k| K^m \left(\frac{K}{1+K} \cdot \frac{k}{e(m+k)} \right)^k.$$

Q. e. d.

2. Before turning to the most essential lemma III, we need a lemma in the theory of Newton-interpolation. Though it is probably classical I could nowhere find it.

LEMMA II. Let l be a simple closed curve consisting of analytical arcs on the w -plane and $g(w)$ a regular function outside and on l so that $g(w) \rightarrow 0$ uniformly if $|w| \rightarrow \infty$. Given different points $w_1, w_2, \dots, w_r$ outside l , the polynomial $R(w)$ of degree $\leq r-1$ which coincides with $g(w)$ for $w = w_v$ ($v=1, 2, \dots, r$) can be written in the form

$$R(w) = e_0 + e_1(w-w_1) + e_2(w-w_1)(w-w_2) + \dots + e_{r-1}(w-w_1)\dots(w-w_{r-1}),$$

where

$$e_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{g(\eta)}{(w_1-\eta)(w_2-\eta)\dots(w_{r-1}-\eta)} d\eta.$$

The existence and unicity of the required polynomial is of course classical; only the coefficient-formula needs a verification. Hence we have to consider the polynomial

$$R_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} g(\eta) \left(\frac{1}{\eta-w_1} + \frac{w-w_1}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)} + \dots + \frac{(w-w_1)(w-w_2)\dots(w-w_{r-1})}{(\eta-w_1)(\eta-w_2)\dots(\eta-w_r)} \right) d\eta,$$

of degree $\leq r-1$ and to show that $R_1(w) = R(w)$. For this it is sufficient to show

$$R_1(w_v) = R(w_v) = g(w_v) \quad (v=1, 2, \dots, r),$$

or for $v=1, 2, \dots, r$ the formula

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} g(\eta) \left(\frac{1}{\eta - w_1} + \frac{w_v - w_1}{(\eta - w_1)(\eta - w_2)} + \dots + \frac{(w_v - w_1)(w_v - w_2) \dots (w_v - w_{v-1})}{(\eta - w_1)(\eta - w_2) \dots (\eta - w_v)} \right) d\eta = g(w_v).$$

But we have obviously

$$\frac{1}{\eta - w_v} = \frac{(w_v - w_1)(w_v - w_2) \dots (w_v - w_{j-1})}{(\eta - w_1)(\eta - w_2) \dots (\eta - w_{j-1})} - \frac{(w_v - w_1) \dots (w_v - w_j)}{(\eta - w_1) \dots (\eta - w_j)} + \frac{(w_v - w_1) \dots (w_v - w_{j-1})}{(\eta - w_1) \dots (\eta - w_j)};$$

hence summing for $j=2, 3, \dots, v$ we obtain

$$\sum_{j=2}^v \frac{(w_v - w_1) \dots (w_v - w_{j-1})}{(\eta - w_1) \dots (\eta - w_j)} = \frac{1}{\eta - w_v} \cdot \frac{w_v - w_1}{\eta - w_1}$$

or, adding the term $(\eta - w_1)^{-1}$ to both sides, the identity

$$\frac{1}{\eta - w_1} + \frac{w_v - w_1}{(\eta - w_1)(\eta - w_2)} + \dots + \frac{(w_v - w_1)(w_v - w_2) \dots (w_v - w_{v-1})}{(\eta - w_1)(\eta - w_2) \dots (\eta - w_v)} = \frac{1}{\eta - w_v}.$$

This and (2.2.1) prove our assertion.

3. We need further the¹²

LEMMA III. For $m \geq n$, $1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$ we have

$$M_2 = \max_{\substack{m \leq v \leq m+n \\ v \text{ integer}}} |d_1 z_1^v + d_2 z_2^v + \dots + d_n z_n^v| \geq \left(\frac{n}{e^6 m} \right)^n \min_{j=1, \dots, n} |d_1 + \dots + d_j|.$$

For the proof of this lemma we may suppose $n \geq 2$. We make use of the following theorem of BOUTROUX—H. CARTAN¹³. If $h_1(w)$ is a polynomial of degree n with 1 as leading coefficient and H denotes an arbitrarily prescribed positive number, then the estimation

$$|h_1(w)| \leq \left(\frac{H}{e} \right)^n$$

holds on the whole complex plane, except possibly a set, which can be covered by circles, the sum of whose radii is $< 2H$. Applying this theorem

to $h_2(w) = \prod_{j=1}^n (w - z_j)$ and $H = d \frac{n}{m^r}$ where d denotes a numerical constant to

¹² We could give a form of this lemma valid for all $m \geq 1$, but for the intended applications this is unnecessary.

¹³ For a complete proof see G. VALIRON, *Directions de Borel des fonctions mero-morphes* (Paris, 1938, pp. 11–12).

be determined later, we obtained that

$$\prod_{j=1}^n |w - z_j| \geq \left(\frac{d}{e} \cdot \frac{n}{m} \right)^n$$

outside of n circles at most, the diameter-sum of which is $< 4d \frac{n}{m}$. Thus one can assure the existence of an r_0 with

$$(2.3.1) \quad 1 - 4d \frac{n}{m} \leq r_0 \leq 1$$

such that *on the whole periphery* of $|w| = r_0$

$$\prod_{j=1}^n |w - z_j| \geq \left(\frac{d}{e} \cdot \frac{n}{m} \right)^n$$

holds. Since every factor on the left is absolutely < 2 on $|w| = r_0$, for every choice of the indices

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$$

we obtained the estimation

$$(2.3.2) \quad \prod_{j=1}^n |w - z_{i_j}| \geq \left(\frac{d}{2e} \cdot \frac{n}{m} \right)^n.$$

We have to distinguish two cases.

4. *Case I.* Every $|z_\nu|$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) is $\geq r_0$. Then we may apply lemma I or indeed (2.1.9) with

$$K = 1 - 4d \frac{n}{m}, \quad k = n.$$

With the notation

$$M'_0 = \max_{\substack{m+1 \leq j \leq m+n \\ j \text{ integer}}} |f(j)|$$

this gives

$$M'_2 \geq |d_1 + d_2 + \dots + d_n| \left(1 - 4d \frac{n}{m} \right)^m \left(\frac{1 - 4d \frac{n}{m}}{2e} \cdot \frac{n}{m+n} \right)^n$$

or, using $m \geq n$,

$$(2.4.1) \quad M'_2 \geq |d_1 + d_2 + \dots + d_n| \left(1 - 4d \frac{n}{m} \right)^m \left(\frac{1 - 4d \frac{n}{m}}{4e} \cdot \frac{n}{m} \right)^n.$$

If

$$(2.4.2) \quad d \leq \frac{1}{8},$$

then

$$1 - 4d \frac{n}{m} \geq \frac{1}{2}$$

and

$$\left(1 - 4d \frac{n}{m}\right)^m > \exp\left(-\frac{4dn}{1 - 4d \frac{n}{m}}\right) \cdot e^{8dn};$$

thus from (2.4.1) it follows

$$(2.4.3) \quad M'_2 > |d_1 + \dots + d_n| \left(\frac{1}{8} e^{-1-8d} \frac{n}{m}\right)^n > |d_1 + \dots + d_n| \left(e^{-4-8d} \frac{n}{m}\right)^n.$$

5. Case II. There is an integer l such that

$$(2.5.1) \quad 1 \leq l < n$$

and

$$1 = |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_l| > r_0 > |z_{l+1}| \geq \dots \geq |z_n|.$$

The restriction $|z_l| > r_0 > |z_{l+1}|$ means no loss of generality, since on $w = r_0$ we have

$$\prod_{j=1}^n |w - z_j| \leq \left(\frac{d}{e} \frac{n}{m}\right)^n < 0.$$

Let m first be an integer and all the numbers z_i different from each other. Then we form new auxiliary polynomials. First

$$(2.5.2) \quad f_4(w) = \prod_{j=l+1}^n (w - z_j) = \sum_{j=0}^{n-l} d_j^{(4)} w^{n-l-j}.$$

We have for these

$$(2.5.3) \quad |d_j^{(4)}| = \left| \sum_{l+1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_j \leq n} z_{h_1} z_{h_2} \dots z_{h_j} \right| \leq \binom{n-l}{j}.$$

Let further $f_5(w)$ be that polynomial of degree $\leq (l-1)$, which assumes for $w = z_1, w = z_2, \dots, w = z_l$ the values

$$\frac{1}{z_1^{m+1} f_4(z_1)}, \frac{1}{z_1^{m+1} f_4(z_2)}, \dots, \frac{1}{z_l^{m+1} f_4(z_l)}$$

respectively. If $l=1$, we have simply

$$(2.5.4) \quad f_5(w) = \frac{1}{z_1^{m+1} f_4(z_1)} = d_0^{(5)}.$$

If $1 < l < n$, we may represent $f_5(w)$ as a Newton-interpolatorical polynomial

$$(2.5.5) \quad f_5(w) = d_0^{(5)} + d_1^{(5)}(w - z_1) + d_2^{(5)}(w - z_1)(w - z_2) + \dots + d_{l-1}^{(5)}(w - z_1)(w - z_2) \dots (w - z_{l-1}).$$

We have to estimate the coefficients $d_j^{(5)}$. According to lemma II we have

$$d_j^{(5)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_0} \frac{dw}{w^{m+1} f_4(w) (w - z_1)(w - z_2) \dots (w - z_{j+1})} \quad (j = 0, 1, \dots, l-1).$$

But the polynomial

$$f_4(w)(w - z_1)(w - z_2) \dots (w - z_{l-1})$$

is obviously of the form (2.3.2); hence using the estimation (2.3.2) we obtain

$$|d_j^{(5)}| \leq \frac{1}{2^{\varepsilon}} 2^{\pi r_0} \frac{1}{r_0^{m+1}} \cdot \left(\frac{2e}{d} \frac{m}{n} \right)^n,$$

or from (2.3.1) and (2.4.2)

$$(2.5.6) \quad |d_j^{(5)}| \leq \left(\frac{1}{1-4d \frac{n}{m}} \right)^m \left(\frac{2e}{d} \frac{m}{n} \right)^n < \left(e^{\frac{4d}{1-4d \frac{n}{m}}} \frac{2e}{d} \frac{m}{n} \right)^n < \left(\frac{2}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n} \right)^n.$$

We may arrange this polynomial $f_5(w)$ in the usual form

$$f_5(w) = \sum_{j=0}^{l-1} d_j^{(6)} w^j.$$

We need also upper estimation for the quantities $d_j^{(6)}$. This can be derived easily from (2.5.6) if we express the coefficients $d_j^{(6)}$ by the $d_j^{(5)}$'s. We have

$$d_{l-1}^{(6)} = d_{l-1}^{(5)}$$

and (if $1 < l < n$) for $j=0, 1, \dots, l-2$:

$$\begin{aligned} d_j^{(6)} &= d_j^{(5)} - d_{j+1}^{(5)} \sum_{1 \leq r_1 \leq j+1} z_{r_1} + d_{j+2}^{(5)} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 \leq j+2} z_{r_1} z_{r_2} - \dots \\ &\dots + (-1)^{l-j-1} d_{l-1}^{(5)} \sum_{1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{l-j-1} \leq l-1} z_{r_1} z_{r_2} \dots z_{r_{l-j-1}}. \end{aligned}$$

Hence from (2.5.6) and $|z_j| \leq 1$ for $j=0, 1, \dots, l-2$

$$(2.5.7) \quad |d_j^{(6)}| \leq \left(\frac{2}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n} \right)^n \left\{ 1 + \binom{j+1}{1} + \binom{j+2}{2} + \dots + \binom{l-1}{l-j-1} \right\} \left(\frac{2}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n} \right)^n \binom{l}{j+1}.$$

We form finally the auxiliary polynomial

$$(2.5.8) \quad f_6(w) = w^{m+1} f_4(w) f_5(w) = \sum_{j=m+1}^{m+n} d_j^{(7)} w^j.$$

It follows from the definitions of $f_4(w)$ and $f_5(w)$ that

$$f_6(z_1) = f_6(z_2) = \dots = f_6(z_l) = 1, \quad f_6(z_{l+1}) = f_6(z_{l+2}) = \dots = f_6(z_n) = 0.$$

We replace here $f_6(w)$ by the explicit form (2.5.8) and multiply by the respective d_r 's. After a summation with respect to r , using again the notation

$$d_1 z_1^r + d_2 z_2^r + \dots + d_n z_n^r = f(x),$$

we obtain the identity

$$\sum_{v=1}^l d_v \sum_{j=m+1}^{m+n} d_j^{(7)} f(j),$$

or the estimation

$$(2.5.9) \quad \left| \sum_{v=2}^l d_v \right| \leq M'_2 \sum_{j=m+1}^{m+n} |d_j^{(7)}|.$$

Since

$$d_j^{(7)} = \sum_v d_v^{(6)} \text{ coeffs. } w^{j-v-m-1} \text{ in } f_4(w) = \sum_v d_v^{(6)} d_{n-l-j+v+m+1}^{(4)},$$

from (2.5.3) and (2.5.7) we obtain

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} |d_j^{(7)}| \leq \left(\sum_{j=0}^{l-1} |d_j^{(6)}| \right) \left(\sum_{j=0}^{n-l} |d_j^{(4)}| \right) \leq \left(\frac{4}{d} e^{1+8d} \frac{m}{n} \right)^n.$$

Thus from (2.5.9) we conclude that

$$(2.5.10) \quad M' \leq \left(\frac{d}{4} e^{-1-8d} \frac{n}{m} \right)^n \left| \sum_{v=2}^l d_v \right| \geq \left(\frac{d}{4} e^{-1-8d} \frac{n}{m} \right)^n \min_{j=1, 2, \dots, n} \left| \sum_{v=1}^j d_v \right|.$$

Choosing $d = \frac{1}{8}$ we have

$$e^{-4-8d} = e^{-5}, \quad \frac{d}{4} e^{-1-8d} = \frac{1}{32} e^{-2} > e^{-6};$$

hence we obtain from (2.4.3) and (2.5.10)

$$(2.5.11) \quad M'_2 \geq \left(\frac{n}{e^6 m} \right)^n \min_{j=1, 2, \dots, n} |d_1 + \dots + d_j|$$

with the restrictions that m is an integer and the z_v 's are all different.

6. First we get rid of the hypothesis of the z_v 's being all different from each other. We construct an infinite sequence $(z_{1l}, z_{2l}, \dots, z_{nl})$ $l = 1, 2, \dots$ where for all fixed $v = 1, 2, \dots, n$

$$z_{vl} \rightarrow z_v \quad \text{if } l \rightarrow \infty$$

and

$$z_{il} \neq z_{jl} \quad \text{for } 1 \leq i < j \leq n.$$

Denoting by $f_l(x)$ the quantity

$$\sum_{v=1}^n d_v z_{vl}^x,$$

(2.5.11) assures the existence of an integer $p = p(l)$ with

$$m+1 \leq p \leq m+n$$

and

$$|f_l(p)| \geq \left(\frac{n}{e^6 m} \right)^n \min_{j=1, 2, \dots, n} |d_1 + \dots + d_j|.$$

Since p can assume a finite number of values only, there is at least one of them, say p^* , for which

$$|f_l(p^*)| \geq \left(\frac{n}{e^6 m} \right)^n \min_{j=1, 2, \dots, n} |d_1 + \dots + d_j|$$

holds for an infinity of l -values. This proves (2.5.11) even if some of the z_v 's are equal.

To get rid of the condition of m being an integer, we apply again (2.5.11) with $[m]$ (if $m \geq n$, then $[m] \geq n$ is true of course) instead of m . Hence

$$M = \max_{\substack{[m] \leq 1 \leq v \leq [m] + n \\ v \text{ integer}}} |f(v)| = M'_2 \geq \left(\frac{n}{e^6 [m]} \right)^n \min_j |d_1 + \dots + d_j| \geq \\ \geq \left(\frac{n}{e^6 m} \right)^n \min_{j=1, 2, \dots, n} |d_1 + \dots + d_j|.$$

Q. e. d.

7. We shall actually use in the case $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ the following

LEMMA IV. *If $n \leq N$, and $z_1, z_2, \dots, z_n$ are such that*

$$1 \geq |z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|,$$

further $m \geq N$, then we have

$$\max_{\substack{m \leq \gamma \leq m+N \\ \gamma \text{ integer}}} |d_1 z_1^\gamma + d_2 z_2^\gamma + \dots + d_n z_n^\gamma| \geq \left(\frac{N}{e^6 m} \right)^N \min_{j=1, \dots, n} |d_1 + \dots + d_j|.$$

For the proof we introduce the numbers $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ by

$$z_j = \xi_j m^*$$

where

$$m^* = \max_{j=1, \dots, n} |z_j|.$$

Then we have obviously

$$|\xi_1| = 1 \quad |\xi_j| \leq 1 \quad (j = 2, 3, \dots, n);$$

hence lemma III is applicable to the numbers

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \dots = \xi_{[N]} = 0.$$

Thus we obtain

$$\max_{\substack{m \leq \gamma \leq m+N \\ \gamma \text{ integer}}} |d_1 z_1^\gamma + d_2 z_2^\gamma + \dots + d_n z_n^\gamma| = \\ = \max_{\substack{m \leq \gamma \leq m+N \\ \gamma \text{ integer}}} m^{*\gamma} |d_1 \xi_1^\gamma + d_2 \xi_2^\gamma + \dots + d_n \xi_n^\gamma + 0 \cdot \xi_{n+1}^\gamma + \dots + 0 \cdot \xi_{[N]}^\gamma| \geq \\ \geq \max_{\substack{m \leq \gamma \leq m+[N] \\ \gamma \text{ integer}}} |d_1 \xi_1^\gamma + d_2 \xi_2^\gamma + \dots + 0 \cdot \xi_{[N]}^\gamma| = \left(\frac{[N]}{e^6 m} \right)^{[N]} \min_j |d_1 + \dots + d_j| \geq \\ \geq \left(\frac{N}{e^6 m} \right)^N \min_j |d_1 + \dots + d_j|.$$

Q. e. d.

§ III. The estimation of a square-integral and its consequences on the distribution of values of the function $f(s, \nu, \xi)$

1. We need the trivial

LEMMA V. If $x \geq 9$, $\lambda \geq 5$, $1 < h \leq 3$, then putting

$$(3.1.1) \quad J(x, \lambda, h) = \sum_{n=\lambda}^x n^{-h} \log^x \frac{n}{\lambda}$$

we have

$$J(x, \lambda, h) < 2 \frac{x! \lambda^{1-h}}{(h-1)^{x+1}}.$$

For a proof of this lemma we remark that

$$\frac{d}{dy} \left(y^{-h} \log^x \frac{y}{\lambda} \right) = y^{-h-1} \log^{x-1} \frac{y}{\lambda} \left(x - h \log \frac{y}{\lambda} \right)$$

vanishes for $y > \lambda$ only if

$$y = \lambda e^{\frac{x}{h}},$$

i. e., the maximal term on the right of (3.1.1) is

$$\leq \frac{\left(\frac{x}{h}\right)^x}{\lambda^h e^x} = \frac{1}{\lambda^h} \left(\frac{x}{eh}\right)^x < \frac{1}{e} \frac{x!}{\lambda^h h^x},$$

using (1.9.1). Hence

$$\begin{aligned} J(x, \lambda, h) &< \frac{1}{e} \frac{x!}{\lambda^h h^x} + \int_{\lambda}^x y^{-h} \log^x \frac{y}{\lambda} dy < \frac{x!}{\lambda^h h^x} + \lambda^{1-h} \int_0^{\infty} e^{-(h-1)x} x^x dx = \\ &= \frac{h}{\lambda} \frac{x! \lambda^{1-h}}{h^{x+1}} + \frac{\lambda^{1-h} x!}{(h-1)^{x+1}} < 2 \frac{x! \lambda^{1-h}}{(h-1)^{x+1}}. \end{aligned}$$

2. The function $f(s, \nu, \xi)$ mentioned in the title of this chapter is defined by

$$(3.2.1) \quad f(s, \nu, \xi) = \sum_{n \equiv \xi} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \log^{\nu} \frac{n}{\xi}.$$

The integer ν will be restricted in this moment only by

$$(3.2.2) \quad 10 < \nu + 1 \leq 3 \log T$$

with $T > c$; for ξ we require

$$(3.2.3) \quad \xi \geq e^{\nu+1} (\geq e^{10}).$$

If

$$(3.2.4) \quad 1 < \sigma_0 \leq \frac{3}{2},$$

the square-integral in question will be

$$(3.2.5) \quad J = \int_{\sigma_0}^{2T} |f(s, \nu, \xi)|^2 dt.$$

For J we need the following

LEMMA VI. *With the provisions (3.2.2), (3.2.3) and (3.2.4) we have*

$$J < \nu!^2 \log^3 \xi \left(230 \frac{\xi^{2-2\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{2\nu+4}} + 16 T \frac{\xi^{1-2\sigma_0}}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{2\nu+1}} \right).$$

8. For the proof of this lemma first we use the obvious fact that the series (3.2.1) defining $f(s, \nu, \xi)$ is absolutely convergent in the domain of integration; hence

$$J \leq T \sum_{n \leq \xi} \log^2 \nu \frac{n}{\xi} \frac{\log^2 n}{n^{2\sigma_0}} + 4 \sum_{m, n \geq \xi} \frac{\log^{\nu} \frac{n}{\xi} \log^{\nu} \frac{m}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0}} \frac{\log m \log n}{\log \frac{m}{n}}.$$

Since for $j=0, 1, 2$ we have evidently

$$\log^j n = \left(\log \xi + \log \frac{n}{\xi} \right)^j \leq 2 \left(\log^j \xi + \log^j \frac{n}{\xi} \right),$$

we obtain

$$\begin{aligned} J \leq 4 T \max_{j=0,2} \left\{ \log^{2-j} \xi \sum_{n \geq \xi} \frac{\log^{2\nu+j} \frac{n}{\xi}}{n^{2\sigma_0}} \right\} + \\ + 16 \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \sum_{m, n \geq \xi} \frac{\log^{\nu+j_1} \frac{m}{\xi} \log^{\nu+j_2} \frac{n}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0} \log \frac{m}{n}} \right\}. \end{aligned}$$

Introducing $J(z, \lambda, h)$ of lemma V wherever possible, we get

$$\begin{aligned} (3.3.1) \quad J \leq 4 T \max_{j=0,2} \{ \log^{2-j} \xi \cdot J(2\nu+j, \xi, 2\sigma_0) \} + \\ + \frac{16}{\log 2} \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \sum_{m, n \geq \xi} \frac{\log^{\nu+j_1} \frac{n}{\xi} \log^{\nu+j_2} \frac{m}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0}} \right\} + \\ + \frac{16}{\log 2} \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \sum_{2n \leq m, n \geq \xi} \frac{\log^{\nu+j_1} \frac{n}{\xi} \log^{\nu+j_2} \frac{m}{\xi}}{(mn)^{\sigma_0} (m-n)} \right\} \\ < 4 T \max_{j=0,2} \{ \log^{2-j} \xi \cdot J(2\nu+j, \xi, 2\sigma_0) \} + \\ + \frac{16}{\log 2} \max_{j_1, j_2=0,1} \{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \cdot J(\nu+j_1, \xi, \sigma_0) J(\nu+j_2, \xi, \sigma_0) \} + \\ + \frac{16}{\log 2} \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \sum_{n \geq \xi} \log 2n \frac{\log^{\nu+j_1} \frac{n}{\xi} \log^{\nu+j_2} \frac{2n}{\xi}}{n^{2\sigma_0-1}} \right\}. \end{aligned}$$

We consider the sum behind the last max. This is obviously

$$\begin{aligned} &< \log \xi \sum_{n \geq \xi} \frac{\log^{2\nu+j_1+j_2} \frac{2n}{\xi}}{n^{2\sigma_0-1}} + \sum_{n \geq \xi} \frac{\log^{2\nu+j_1+j_2+1} \frac{2n}{\xi}}{n^{2\sigma_0-1}} \\ &< 2 \max_{j_2=0,1} \left\{ \log^{1-j_2} \xi \cdot J(2\nu+j_1+j_2+j_3, \frac{\xi}{2}, 2\sigma_0-1) \right\}. \end{aligned}$$

Putting this into (3.3.1), the last term becomes

$$< \frac{32}{\log 2} \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \log^{3-j} \xi \cdot J(2\nu+j, \frac{\xi}{2}, 2\sigma_0-1) \right\}.$$

Hence

$$\begin{aligned} (3.3.2) \quad J &< 4T \max_{j=0,2} \left\{ \log^{2-j} \xi \cdot J(2\nu+j, \xi, 2\sigma_0) \right\} + 23 \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot J(\nu+j_1, \xi, \sigma_0) J(\nu+j_2, \xi, \sigma_0) \right\} + 46 \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \log^{3-j} \xi \cdot J(2\nu+j, \frac{\xi}{2}, 2\sigma_0-1) \right\}. \end{aligned}$$

4. Now we may apply lemma V and finish the proof of lemma VI. The conditions of lemma V are fulfilled owing to (3.2.2), (3.2.3) and (3.2.4); thus from (3.3.2) we get

$$\begin{aligned} (3.4.1) \quad J &< 8T \max_{j=0,2} \left\{ \log^{2-j} \xi \frac{(2\nu+j)! \xi^{1-2\sigma_0}}{(2\sigma_0-1)^{2\nu+j+1}} \right\} + 92 \max_{j_1, j_2=0,1} \left\{ \log^{2-j_1-j_2} \xi \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{(\nu+j_1)! (\nu+j_2)! \xi^{2-2\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{2\nu+j_1+j_2+2}} \right\} + 92 \max_{j=0,1,2,3} \left\{ \log^{3-j} \xi \cdot \frac{(2\nu+j)! \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2-2\sigma_0}}{(2\sigma_0-2)^{2\nu+j+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Owing to $(\nu+1) \leq \log \xi$ we have further

$$\begin{aligned} &\max_{j=0,1} \frac{(2\nu+j)! \log^{-j} \xi}{(2\nu)!} \leq \max \left(1, \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)}{\log^2 \xi} \right) < 4, \\ &\max_{j_1, j_2=0,2} \frac{(\nu+j_1)! (\nu+j_2)! \log^{-j_1-j_2} \xi}{\nu!^2} \leq \max \left(1, \frac{\nu+1}{\log \xi}, \frac{(\nu+1)^2}{\log^2 \xi} \right) < 1, \\ &\max_{j=0,1,2,3} \frac{(2\nu+j)! \log^{-j} \xi}{(2\nu)!} \leq \\ &\leq \max \left(1, \frac{2\nu+1}{\log \xi}, \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)}{\log^2 \xi}, \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)}{\log^3 \xi} \right) < 12. \end{aligned}$$

Hence (3.4.1) gives

$$J < 32T \frac{(2\nu)! \xi^{1-2\sigma_0} \log^3 \xi}{(2\sigma_0-1)^{2\nu+1}} + 92 \frac{\nu!^2 \xi^{2-2\sigma_0} \log^2 \xi}{(\sigma_0-1)^{2\nu+1}} + 1104 \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2-2\sigma_0} \log^3 \xi \cdot (2\nu)!}{(2\sigma_0-2)^{2\nu+1}}.$$

Owing to $\sigma_0 < \frac{3}{2}$ and (1.9.2) we obtain

$$J \leq 16 T \frac{r!^2 \xi^{1-2\sigma_0} \log^2 \xi}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{2r+1}} + 92 \frac{r!^2 \xi^{2-2\sigma_0} \log^2 \xi}{(\sigma_0 - 1)^{2r+4}} + 138 \frac{r!^2 \xi^{2-2\sigma_0} \log^3 \xi}{(\sigma_0 - 1)^{2r+4}} + \\ + r!^2 \log^3 \xi \left\{ 16 T \frac{\xi^{1-2\sigma_0}}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{2r+1}} + 230 \frac{\xi^{2-2\sigma_0}}{(\sigma_0 - 1)^{2r+4}} \right\}.$$

Q. e. d.

5. In order to obtain the estimation required for the investigation of $f(s, \nu, \xi)$, we need the simple

LEMMA VII. *If a function $A(t)$ is integrable in $[T, 2T]$ and β is an arbitrary number with $0 < \beta < 1$, then we have in $[T, 2T]$*

$$(3.5.1) \quad |A(t)| \leq T^{-\frac{\beta}{2}} \left(\int_T^{2T} |A(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

except perhaps a set D of measure

$$(3.5.2) \quad \leq T^\beta.$$

The proof of this lemma follows simply from the fact that — denoting the measure of D by $m(D)$ — we have

$$\int_T^{2T} |A(t)|^2 dt \geq \int_D |A(t)|^2 dt \geq m(D) T^{-\beta} \int_T^{2T} |A(t)|^2 dt.$$

Q. e. d.

6. Now we apply lemmas VI and VII with $A(t) = f(\sigma_0 + it, \nu, \xi)$. This gives that the inequality

$$(3.6.1) \quad f(\sigma_0 + it, \nu, \xi) \leq T^{-\frac{j}{2}} r! \log^2 \xi \left(4 \left| T \frac{\xi^{\frac{1}{2}-\sigma_0}}{\left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right)^{r+1}} + 16 \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0 - 1)^{r+2}} \right| \right)$$

holds for $T \leq t \leq 2T$ except at most a set $D = D_{\nu, \xi}$ with

$$(3.6.2) \quad m(D) \leq T^j.$$

In what follows ξ will be a function of ν . Since ν assumes according to (3.2.2) at most $3 \log T$ values, we obtain that omitting from $T \leq t \leq 2T$ a set L , the measure of which is according to (3.6.2)

$$(3.6.3) \quad \leq 3 T^\beta \log T,$$

the inequality (3.6.1) holds (with the provisions (3.2.2)—(3.2.3)—(3.2.4) of course). This is the fact about the distribution of values of $f(s, \nu, \xi)$ we meant by the title of chapter III.

7. We use this distribution-theorem in a specialised form. We divide the interval $[T, 2T]$ into parts

$$(3.7.1) \quad \sigma = \sigma_0, \quad T + \frac{j}{[\log^3 T]} \leq t < T + \frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

and denote them by l_j . We denote by l_j'' resp. by l_j' those l_j 's which belong to L resp. contain at least one t -value *not* belonging to L ; in the last case we call these t -values permissible. The number of the intervals l_j'' is from (3.6.3) and (3.7.1) obviously

$$(3.7.2) \quad < 3 T^\beta \log^4 T.$$

Hence we obtain

LEMMA VIII. *Apart from at most $3 T^\beta \log^4 T$ intervals l_j'' of (3.7.1) the remaining ones contain at least one permissible t -value, i. e. one for which the inequality (3.6.1) with the provisions (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) holds.*

§ IV. Lemmas from the theory of the zeta-function

1. In order to draw conclusions for the zeros from lemma VIII, we have to express $f(s, v, \xi)$ by these zeros. This is performed by

LEMMA IX. *For $\sigma > 1$, $\eta > 1$ and integer $k \geq 2$ we have*

$$f(s, k, \eta) = k! \left[\frac{\eta^{1-s}}{(s-1)^{k+1}} - \sum_q \frac{\eta^{q-s}}{(s-q)^{k+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{2n-s}}{(s+2n)^{k+1}} \right].$$

The proof of this lemma which occurs in my paper¹⁰ can be modelled after the proof of the exact formula of RIEMANN—VON MANGOLDT and therefore it is sufficient to sketch it. We start from the integral

$$(4.1.2) \quad I = - \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha)} \frac{\eta^{sr}}{w^{k+1}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s+w) dw,$$

where $w = u + iv$ and α' is restricted only by

$$(4.1.2) \quad 0 > \alpha' > 1 - \sigma.$$

We may insert the Dirichlet-series for $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)$ and integrate term by term; we obtain

$$(4.1.3) \quad I = \sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\alpha')} \left(\frac{\eta}{n}\right)^{sr} \frac{dw}{w^{k+1}} = (-1)^{k+1} \sum_{n \geq \eta} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{\log^k \frac{n}{\eta}}{k!}.$$

On the other hand we can find for all integer $m \geq 2$ a T_m with

$$m < T_m < m + 1$$

such that on the segment

$$-1 \leq \sigma + u \leq 2, \quad t + v = T_m$$

the inequality

$$(4.1.4) \quad \left| \frac{\zeta'}{\zeta}(s+w) \right| \leq a_1 \log^2 T_m$$

holds. Hence replacing I by

$$I_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha' + (T_m - t)i}^{\alpha' + (T_m + t)i} \frac{\eta^w}{w^{k+1}} \frac{\zeta'}{\zeta}(s+w) dw,$$

we can apply CAUCHY's theorem to I_m along the parallelogramm (P)

$$u + \sigma = \alpha', \quad -T_m \leq t \leq T_m, \quad (l_1)$$

$$-\omega \leq u + \sigma \leq \alpha', \quad t + v = T_m, \quad (l_2), (l_3)$$

$$u + \sigma = -\omega, \quad -T_m \leq t + v \leq T_m, \quad (l_4)$$

where ω is an arbitrary large odd integer. By a routine-estimation one can show that the integrals along $(l_2), (l_3), (l_4)$ tend to 0, when $m \rightarrow \infty$ and $\omega \rightarrow \infty$, further that $I_m \rightarrow I$ and for $\omega \rightarrow \infty$

$$I_m = + \frac{\eta^{1-s}}{(1-s)^{k+1}} - \sum_{|t_0| \leq T_m} \frac{\eta^{t_0-s}}{(t_0-s)^{k+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{-2n-s}}{(-2n-s)^{k+1}}.$$

Q. e. d.

2. Here we mention some facts from the theory of the zeta-function which we need in the rest of the proof. Denoting as usual by $N(U)$ the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the parallelogramm

$$0 < u < 1, \quad 0 < v < U,$$

we have

$$(4.2.1) \quad N(U) < a_2 U \log U$$

and

$$(4.2.2) \quad N(U+1) - N(U) < a_2 \log U.$$

Further we have the estimation¹⁴

$$(4.2.3) \quad |\zeta(u+iv)| < a_3 |v|^{\frac{1}{b}(1-u)} \log^3 |v|$$

valid for $|v| \geq 2, 1-u \leq 1-b$. From this it follows by a usual application of a lemma of LANDAU that $\zeta(w)$ does not vanish in the domain

$$(4.2.4) \quad u > 1 - \frac{a_4}{\log^{\frac{1}{b}} |v|}, \quad |v| > c.$$

3. We shall use the following simple lemma too.

LEMMA X. If

$$(4.3.1) \quad c < T \leq t_0 \leq 2T, \quad \frac{1}{\log^2 T} \leq \alpha < b$$

¹⁴ The stronger inequality with $(\frac{1}{2}-\varepsilon)$ instead of $\frac{1}{b}$ is contained in TITCHMARSH's paper: On $\zeta(s)$ and $\lambda(x)$, *Quart. Journ. of Math., Oxf. Ser.*, **9** (1938), pp. 97—108, deduced from the estimation of VINOGRADOFF. Using the new improved form of VINOGRADOFF's estimation one could replace the exponent $\frac{1}{b}$ in (4.2.3) by $(\frac{1}{2}-\varepsilon)$. But even (4.2.3) is unnecessarily strong for our aims, we use it for convenience only. Similar remarks hold for (4.2.4) too.

and we denote by N_2 the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the parallelogram P_1 defined by

$$(1 >) u \geq 1 - \alpha, \quad |v - t_0| \leq \alpha,$$

then for $T > c$ we have

$$N_2 > (6\alpha)^{\frac{1}{5}} \log T + 7 \log \log T.$$

The proof of this lemma follows easily from JENSEN'S inequality. Calling K_1 the circle

$$w - s_1 = w - (1 - \alpha - it_0) = 7\alpha,$$

we have from this inequality—using (4.2.3) and also the trivial inequalities

$$\frac{1}{|\zeta(s_1)|} < \frac{1 + \alpha}{\alpha} < \frac{2}{\alpha} < 2 \log^2 T < \log^3 T, \quad \log \frac{7}{5} > 1$$

— the estimation

$$N_2 < 3 \log \log T + \log \max_{|w-s_1|=7\alpha} |\zeta(w)| < (6\alpha)^{\frac{1}{5}} \log (2T+1) + \\ + 6 \log \log T < (6\alpha)^{\frac{1}{5}} \log T + 7 \log \log T$$

for $T > c$.

§ V. The basic inequality

1. From lemmas VIII and IX with $k = \nu$, $\nu_i = \xi$ we shall obtain easily our basic inequality. Remarking that t denotes throughout the rest of the paper permissible t -values (and correspondingly $s = \sigma_0 - it$ permissible s -values) we obtain

$$(5.1.1) \quad \left| \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_q \frac{\xi^{q-\sigma_0}}{(s-q)^{\nu+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{2n-\sigma_0}}{(s+2n)^{\nu+1}} \right| \\ \leq T^{-\frac{j}{2}} \log^2 \xi \left(4 \sqrt{T} \frac{\xi^{\frac{1}{2}-\sigma_0}}{(\sigma_0 - \frac{1}{2})^{\nu+1}} + 16 \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0 - 1)^{\nu+2}} \right).$$

2. For a fixed j we denote by

$$(5.2.1) \quad \varrho^* = \sigma^* + it^*$$

that zero of $\zeta(w)$ in the horizontal strip

$$T + \frac{j}{[\log^3 T]} \leq v < T + \frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

(if there is any) whose real part is maximal. Now choosing the s of (5.1.1) permissible in I'_j , we multiply both sides of (5.1.1) by

$$(5.2.2) \quad |\xi^{s-\varrho^*} (s-\varrho^*)^{\nu+1}| = \xi^{\sigma_0-\sigma^*} |s-\varrho^*|^{\nu+1}.$$

Since we have

$$|s - \varrho^*| \leq (\sigma_0 - \sigma^*) + \frac{1}{\log^3 T},$$

we obtain our basic inequality

$$(5.2.3) \left| \xi^{1-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-1} \right)^{\nu+1} - \sum_{\varrho} \xi^{1-\varrho} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{\nu+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{1-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right)^{\nu+1} \right| < \\ > 16 \frac{T^{-\frac{\beta}{2}} \log^2 \xi}{\sigma_0 - 1} \left| \sqrt{T} \xi^{\frac{1}{2}-\varrho^*} \left(\frac{(\sigma_0 - \sigma^*) + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - \frac{1}{2}} \right)^{\nu+1} + \xi^{1-\sigma^*} \left(\frac{(\sigma_0 - \sigma^*) + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1} \right)^{\nu+1} \right|,$$

which holds under the assumptions (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4).

§ VI. The main lemma

1. In this chapter we prove a lemma from which the theorem itself will follow easily. For the sake of brevity we introduce the abbreviations

$$(6.1.1) \quad \varepsilon^* = \beta^{\frac{1}{100}},$$

$$(6.1.2) \quad A_1 = \frac{1}{2} - 200 \beta^{\frac{1}{100}}$$

and we choose a positive β so small that

$$(6.1.3) \quad \varepsilon^* < \frac{1}{80\,000},$$

$$(6.1.4) \quad \frac{1}{3} < A_1 < \frac{1}{2},$$

$$(6.1.5) \quad \beta^{\frac{147}{125}} \log \frac{1}{\beta} < \frac{1}{40} \beta^{\frac{101}{100}},$$

$$(6.1.6) \quad \beta < \frac{6 A_1}{1 - \varepsilon^*} 399 \beta^{\frac{1}{100}} < 1.$$

All of these can obviously be fulfilled if $\beta < b$. We require further that $T > c$ and

$$(6.1.7) \quad \beta \geq \left(\frac{1}{\log T} \right)^{0.9}.$$

No other restrictions are made upon β .

2. Fixing such a β we determine σ_0 by

$$(6.2.1) \quad \sigma_0 = 1 + (1 - \varepsilon^*)^2 \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{100}}.$$

By this choice (3.2.4) is satisfied on account of (6.1.3). Now we consider

those strips of the form

$$(6.2.2) \quad T + \frac{j}{[\log^3 T]} \leq t < T + \frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

for which the segment

$$\sigma_0 + it, \quad T + \frac{j}{[\log^3 T]} \leq t < T + \frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

is an l_j in the sense of § III. Now we state the following

LEMMA XI. *In all such strips $\zeta(w) \neq 0$ for*

$$u > 1 - \frac{\beta}{2} + 200 \beta^{\frac{101}{100}} \equiv 1 - A_1 \beta.$$

We can state this lemma even in a slightly different form. Fixing a strip (6.2.2) and denoting as in (5.2.1) by σ^* the zero with a maximal σ , we have

$$(6.2.3) \quad \sigma^* \leq 1 - A_1 \beta$$

(if there are zeros in the strip at all).

3. For the proof of the main lemma we start from the basic inequality (5.2.3) applying it with

$$(6.3.1) \quad \xi = \exp \left(\frac{6 A_1}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{399}{\beta^{\frac{99}{100}}} (\nu + 1) \right) \equiv e^{A_2 (\nu + 1)},$$

where A_2 is an abbreviation for

$$(6.3.2) \quad \frac{6 A_1}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{399}{\beta^{\frac{99}{100}}}.$$

Hence A_2 is independent of ν . Owing to (6.1.6) we have $A_2 > 1$, i. e.

$$\xi > e^{\nu+1},$$

which means that not only (3.2.4) but even (3.2.3) is fulfilled by our choices of σ_0 resp. ξ . Moreover, owing to the right inequality of (6.1.6) we have

$$(6.3.3) \quad \xi < e^{\frac{\nu+1}{\beta}}.$$

Fixing j , the value of s is fixed, i. e. independent of ν . Only ν is not yet defined in the basic inequality and we have to take care of (3.2.2). ν will be chosen properly later; here we make the further restriction

$$(6.3.4) \quad \nu + 1 > \frac{1 - \varepsilon^2}{6 A_1} \frac{1}{399} \beta^{\frac{99}{100}} \log T \equiv \frac{\log T}{A_2}.$$

This will enable us to drop the second term in brackets on the right in the basic inequality (5.2.3). But previously we have to show that this new

restriction (6.3.4) is compatible with (3.2.2). From (6.1.6) we have evidently

$$\frac{1-\varepsilon^*}{6A_1} \frac{1}{399} \beta^{\frac{99}{100}} < 3$$

which shows this compatibility. Hence (6.3.4) and (3.2.2) can be melted into a single restriction. Since from (6.1.6) we have

$$A_2 < \frac{1}{\beta},$$

from (6.3.4) it follows

$$\nu + 1 > \beta \log T$$

and from (6.1.7)

$$\nu + 1 > \log^{0,1} T;$$

thus for $T > c$ we have

$$\nu + 1 > 10.$$

Hence the only restriction on ν is, if $T > c$, that

$$(6.3.5) \quad \frac{\log T}{A_2} \leq \nu + 1 \leq 3 \log T.$$

Then using (6.3.4) we have indeed a fortiori

$$\nu + 1 > \frac{\log T}{A_2 + \log \frac{1}{4(\sigma_0 - 1)^2}};$$

i. e.

$$\left(\frac{1}{2(\sigma_0 - 1)} \right)^{\nu+1} > \sqrt[\frac{1}{e^{A_2(\nu+1)}}]{T} = \sqrt[\frac{T}{\xi}]{T},$$

and since $\sigma_0 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, again a fortiori

$$\left(\frac{\sigma_0 - \frac{1}{2}}{\sigma_0 - 1} \right)^{\nu+1} > \sqrt[\frac{T}{\xi}]{T}.$$

Taking this into account, the basic inequality becomes

$$(6.3.6) \quad \left| \xi^{1-\sigma^*} \left(\frac{s-\rho^*}{s-1} \right)^{\nu+1} - \sum_{\rho} \xi^{\rho-\sigma^*} \left(\frac{s-\rho^*}{s-\rho} \right)^{\nu+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{2n-\sigma^*} \left(\frac{s-\rho^*}{s+2n} \right)^{\nu+1} \right| < \\ < 32 T^{-\frac{\beta}{2}} \frac{\xi^{1-\sigma^*} \log^3 \xi}{\sigma_0 - 1} \left(\frac{(\sigma_0 - \sigma^*) + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1} \right)^{\nu+1},$$

valid with the single restriction (6.3.5).

4. Now we suppose our lemma IX, i. e., that the inequality (6.2.3) is not true for a certain strip (6.2.2) and we shall show that this leads to a contradiction. This means that for a certain strip (6.2.2), which we now fix, we suppose

$$(6.4.1) \quad \sigma^* > 1 - A_1 \beta.$$

Then we estimate the last factor on the right of (6.3.6). Using (6.2.1) and (6.4.1) for the expression

$$(6.4.2) \quad U = \frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1}$$

we have the estimation

$$U = \frac{1 - \sigma^* + (1 - \varepsilon^*)^2 \frac{\beta^{\frac{49}{50}}}{399^2} + \frac{1}{\log^3 T}}{(1 - \varepsilon^*)^2 \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}}} < 1 + A_1 \frac{399^2}{(1 - \varepsilon^*)^2 \beta^{\frac{1}{50}}} + \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 \frac{1}{\beta^{\frac{49}{50}} \log^3 T}.$$

Owing to (6.1.7) we have

$$\frac{1}{\log^3 T} \leq \beta^{\frac{101}{50}},$$

i. e.

$$(6.4.3) \quad U < 1 + \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 (A_1 \beta^{\frac{1}{50}} + \beta^{2 + \frac{1}{50}}) = 1 + (A_1 + \beta^2) \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 \beta^{\frac{1}{50}} < \exp \left((A_1 + \beta^2) \beta^{\frac{1}{50}} \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 \right).$$

Further from (6.3.1) and (6.4.1) we have

$$\xi^{1 - \sigma^*} < \exp(A_2(\nu + 1) A_1 \beta),$$

i. e., from this and (6.4.3) we have

$$(6.4.4) \quad \xi^{1 - \sigma^*} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1} \right)^{\nu + 1} < \exp \left\{ \left(A_1 A_2 \beta + \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 \beta^{\frac{1}{50}} (A_1 + \beta^2) \right) (\nu + 1) \right\}.$$

To make the right of (6.4.4) simpler we replace the restriction (6.3.5) by the stronger one

$$(6.4.5) \quad \frac{\log T}{A_2} \leq \nu + 1 \leq \frac{1}{1 - 200 \varepsilon^*} \cdot \frac{\log T}{A_2}.$$

Then for the exponent on the right of (6.4.4) we have

$$\begin{aligned} (\nu + 1) \left\{ A_1 A_2 \beta + (A_1 + \beta^2) \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 \beta^{\frac{1}{50}} \right\} &\leq \frac{\log T}{1 - 200 \varepsilon^*} \left\{ A_1 \beta + \frac{A_1 + \beta^2}{A_2} \left(\frac{399}{1 - \varepsilon^*} \right)^2 \beta^{\frac{1}{50}} \right\} \\ &= \frac{\log T}{1 - 200 \varepsilon^*} \left\{ \frac{1 - 400 \varepsilon^*}{2} \beta + \frac{A_1 + \beta^2}{6 A_1} \frac{399}{1 - \varepsilon^*} \beta^{\frac{101}{100}} \right\} \end{aligned}$$

and, owing to (6.1.3) and (6.1.4),

$$\begin{aligned} &< \log T \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{100 \varepsilon^*}{1 - 200 \varepsilon^*} \beta + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{1000} \right) \frac{399}{0.98} \beta^{\frac{101}{100}} \right\} < \\ &< \log T \left\{ \left(\frac{1}{2} - 100 \varepsilon^* \right) \beta + 80 \beta^{\frac{101}{100}} \right\} < \frac{1 - \varepsilon^*}{2} \beta \log T. \end{aligned}$$

Hence from (6.4.4) we obtain

$$(6.4.6) \quad \xi^{1-\sigma^*} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1} \right)^{v+1} < T^{\frac{1-\varepsilon^*}{2}}.$$

Since from (6.3.3), (6.2.1), (6.3.5) and (6.1.7) for $T > c$ we have

$$\frac{\log^2 \xi}{\sigma_0 - 1} < \frac{(v+1)^2}{\beta^2(1-\varepsilon^*)^2} \frac{399^2}{\beta^{49/30}} < \frac{9 \cdot 399^2}{(1-\varepsilon^*)^2} \frac{\log^2 T}{\beta^3} < \frac{1}{32} \log^6 T,$$

from this, (6.4.6) and (6.3.6) for $T > c$ we get

$$(6.4.7) \quad \left| \xi^{1-\sigma^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-1} \right)^{v+1} - \sum_{\varrho} \xi^{\varrho-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{v+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-2n-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right)^{v+1} \right| < T^{-\frac{\varepsilon^* \beta}{2}} \log^6 T = T^{-\frac{1}{2} \beta^{1,01}} \log^6 T$$

with the restriction (6.4.5). Denoting

$$(6.4.8) \quad \beta^{50} = \varepsilon_1$$

it follows from the inequality (6.4.7) — taking (6.3.1) and (6.4.1) into account — that

$$(6.4.9) \quad Z = \left| \sum_{\substack{\sigma_{\varrho} \geq 1-\varepsilon_1 \\ |t_{\varrho}-t| \leq t_1}} \left(\varrho^{A_2(\varrho-\varrho^*)} \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{v+1} \right| = \left| \sum_{\substack{\sigma_{\varrho} \geq 1-\varepsilon_1 \\ |t_{\varrho}-t| \leq t_1}} \xi^{\varrho-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{v+1} \right| < \\ < T^{-\frac{\varepsilon^* \beta}{2}} \log^6 T + \left| \sum_{|t_{\varrho}-t| \leq t_1} \xi^{\varrho-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{v+1} \right| + \left| \sum_{\substack{\sigma_{\varrho} \geq 1-\varepsilon_1 \\ |t_{\varrho}-t| > t_1}} \xi^{\varrho-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right)^{v+1} \right| + \\ + \left| \xi^{1-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s-1} \right)^{v+1} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-2n-\varrho^*} \left(\frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right)^{v+1} \right| < T^{-\frac{\varepsilon^* \beta}{2}} \log^6 T + \\ + \sum_{t_{\varrho}-t > 20} \xi^{A_1 \beta} \left| \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right|^{v+1} + \sum_{20 \leq t_{\varrho} \leq t_1} \xi^{A_1 \beta} \left| \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right|^{v+1} + \sum_{-\varepsilon_1 > t_{\varrho}-t > -20} \xi^{A_1 \beta} \left| \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right|^{v+1} + \\ + \sum_{t_{\varrho}-t \leq -20} \xi^{A_1 \beta} \left| \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right|^{v+1} + \sum_{\substack{\sigma_{\varrho} \geq 1-\varepsilon_1 \\ |t_{\varrho}-t| \leq \varepsilon_1}} \xi^{A_1 \beta} \left| \frac{s-\varrho^*}{s-\varrho} \right|^{v+1} + \xi^{A_1 \beta} \left| \frac{s-\varrho^*}{s-1} \right|^{v+1} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-2n} \left| \frac{s-\varrho^*}{s+2n} \right|^{v+1} < T^{-\frac{\varepsilon^* \beta}{2}} \log^6 T + Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_7.$$

We remember that here t denotes a permissible value in the sense of § III.

5. The estimations of Z_6 and Z_7 are completely trivial. Using $\xi < e^{\frac{v+1}{2}}$ (see (6.3.3)) and $A_1 < \frac{1}{2}$ (see (6.1.4)) we have for $T > c$

$$(6.5.1) \quad Z_6 \leq e^{\frac{v+1}{2}} \left(\frac{2}{T} \right)^{v+1} < \left(\frac{4}{T} \right)^{v+1} < \left(\frac{4}{T} \right)^{10} < \frac{1}{T^5}$$

and

$$(6.5.2) \quad Z_7 < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{s - \varrho^*}{s + 2n} \right|^{v+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{s - \varrho^*}{s + 2n} \right|^{v-1} \cdot \left| \frac{s - \varrho^*}{s + 2n} \right|^2 = \\ \equiv \left(\frac{2}{T} \right)^{v-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n} \right)^2 < \frac{1}{T^5}.$$

To estimate Z_1 we obtain first using (4.2.2) and (6.3.3)

$$Z_1 < a_2 \sum_{n \geq 20} \log(t : n) e^{1/(v+1)} \left(\frac{2}{n} \right)^{v+1} \cdot 2a_2 \log T \sum_{n \geq 20} \log n \left(\frac{4}{n} \right)^{v+1} < a_3 \frac{\log T}{5^{v+1}}.$$

But from (6.3.4) and (6.1.6) we have

$$v+1 > \beta \log T,$$

i. e., from (6.5.3)

$$(6.5.4) \quad Z_1 < a_3 \frac{\log T}{T^\beta}.$$

The estimation of Z_1 runs analogously. We estimate the sum Z_2 as follows. Using (4.2.2), (6.3.3), (6.1.4) again and the definition of σ_0 (see (6.2.1)) we have

$$Z_2 < 40a_2 \log T \cdot e^{\frac{v+1}{2}} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\varepsilon_1} \right)^{v+1} < \\ < 40a_2 \log T \left(\sqrt{e} \cdot \frac{1 + \frac{1}{339^2} \beta^{\frac{49}{50}} - \sigma + \frac{1}{\log^3 T}}{\beta^{\frac{49}{50}}} \right)^{v+1}.$$

But from (6.1.7) and (6.1.3) we have the inequalities

$$\frac{1}{\log^3 T} < \beta^{\frac{30}{9}} < \beta, \quad \frac{3}{2} \beta < \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}},$$

i. e. using (6.4.1) too

$$Z_2 < 40a_2 \log T \left(\sqrt{e} \cdot \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}} + \beta}{\beta^{\frac{49}{50}}} \right)^{v+1} < 40a_2 \log T \left(\frac{4}{399^2} \right)^{v+1}.$$

As we have seen, $v+1 > \beta \log T$; hence

$$(6.5.5) \quad Z_2 < 40a_2 \frac{\log T}{T^\beta}.$$

For Z_3 the same procedure works. For the remaining sum Z_5 we have similarly

$$(6.5.6) \quad Z_5 < 2a_2 \log T \cdot e^{\frac{v+1}{2}} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma^* + \frac{1}{\log^3 T}}{\sigma_0 - 1 + \varepsilon_1} \right)^{v+1} < \\ < 2a_2 \log T \left(\sqrt{e} \cdot \frac{\frac{\beta}{2} + \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}} + \beta}{(1 - \varepsilon^*)^2 \frac{1}{399^2} \beta^{\frac{49}{50}} + \beta^{\frac{49}{50}}} \right)^{v+1} < 2a_2 \log T \left(\frac{1}{399^2} \right)^{v+1} < \frac{2a_2 \log T}{T^\beta}.$$

Collecting all these we obtain from (6.4.9) for $T > c$

$$Z = \left| \sum_{\substack{\sigma_Q = -1 \\ |t_Q - t_1| < t_1}} \left(e^{A_2(\sigma_Q - \varrho^*)} \frac{s - \varrho^*}{s - \varrho} \right)^{\nu+1} \right| < 2 T^{-\frac{\varepsilon^* \beta}{2}} \log^6 T,$$

provided that (6.4.5), (6.1.7) and the supposition (6.4.1) hold.

6. To obtain a lower estimation for Z we shall choose $(\nu+1)$ suitably. This will be done by application of lemma IV. The domain of summation as well as the terms in Z are independent of ν ; they will play the role of the z_j 's of lemma IV. The condition

$$\max_j |z_j| \geq 1$$

is fulfilled; we have to take only the term corresponding to $\sigma = \varrho$. We choose

$$(6.6.1) \quad m = \frac{\log T}{A_2} = \frac{1 - \varepsilon^*}{6 A_1} \beta^{\frac{99}{100}} \log T$$

as m of lemma IV. We have further to determine N of lemma IV. As N can serve any upper estimation of the number of the zeros lying in the domain of summation in (6.5.7). Such an estimation can be derived from lemma X choosing our permissible t as t_0 and ε_1 as ε of this lemma. Only the second condition in (4.3.1) needs a verification; but owing to (6.1.7)

$$\frac{1}{\log^2 T} = \left(\frac{1}{\log^{0.9} T} \right)^{\frac{20}{9}} \leq \beta^{\frac{20}{9}} < \beta^{\frac{49}{50}} = \varepsilon_1,$$

i. e. lemma X is applicable indeed. Hence

$$n \leq (6 \varepsilon_1)^{\frac{6}{5}} \log T + 7 \log \log T = N.$$

In order to apply lemma IV, we have to verify a) that $m < N$ is fulfilled, and then to show b) that the whole interval $[m, m+N]$ is included in the interval (6.4.5), for only this assures that our $(\nu+1)$ in Z can be chosen as the γ of lemma IV, i. e., restriction (6.4.5) is fulfilled. According to the definition of m and N in (6.6.1) resp. in (6.6.2), this is certainly true if

$$\frac{1}{4.399} \beta^{\frac{99}{100}} > (6 \beta^{\frac{49}{50}})^{\frac{6}{5}} + 7 \frac{\log \log T}{\log T},$$

which is fulfilled for $T > c$ if

$$\frac{1}{1600} \beta^{\frac{99}{100}} > 36 \beta + 7 \left(\frac{1}{\log T} \right)^{0.9}$$

or — taking (6.1.7) into account —

$$\frac{1}{1600} \beta^{\frac{99}{100}} > 43 \beta.$$

But this is true according to (6.1.3). Assertion b) is equivalent to the inequality

$$N \leq \left(\frac{1}{1-200\varepsilon^*} - 1 \right) \frac{\log T}{A_2} = \frac{200\beta^{\frac{1}{100}}}{1-200\varepsilon^*} \cdot \frac{1-\varepsilon^*}{6A_1} \cdot \frac{\beta^{\frac{99}{100}}}{399} \log T,$$

which holds good if

$$(6\beta^{\frac{49}{50}})^{\frac{6}{5}} + 7 \frac{\log \log T}{\log T} < \frac{1}{8} \beta$$

resp. if

$$(6.6.3) \quad 36\beta^{\frac{147}{125}} + \frac{1}{\log^{0.95} T} < \frac{1}{8} \beta.$$

But this is true indeed, since from (6.1.7) we have

$$\frac{1}{\log^{0.95} T} \leq \beta^{\frac{19}{18}},$$

i. e., the left side of (6.6.3) is

$$36\beta^{\frac{147}{125}} + \beta^{\frac{19}{18}} < 37\beta^{\frac{19}{18}} < \frac{1}{8} \beta$$

according to (6.1.3). Hence we choose in (6.5.7) as $(n+1)$ the value γ given by lemma IV. Thus

$$\begin{aligned} Z &> \left(\frac{(6\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}} \log T + 7 \log \log T}{e^6 \frac{1-\varepsilon^*}{6A_1} \frac{\beta^{\frac{100}{100}}}{399} \log T} \right)^{(6\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}} \log T + 7 \log \log T} > \\ &> \left(\frac{(6\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}} 6A_1 399}{e^6 \beta^{\frac{100}{100}}} \right)^{(6\varepsilon_1)^{\frac{6}{5}} \log T} \left(\frac{6A_1 399}{e^6 \beta^{\frac{100}{100}} \log T} \right)^{7 \log \log T} > \\ &> \left(\frac{800}{e^6} \beta^{\frac{1}{5}} \right)^{36 \beta^{\frac{147}{125}} \log T} \left(\frac{1}{\log T} \right)^{7 \log \log T} > T^{-8 \beta^{\frac{147}{125}} \log \frac{1}{\beta}} e^{-7 (\log \log T)^2} \end{aligned}$$

and (6.5.7) gives

$$T^{\left(\frac{1}{2} \beta^{\frac{101}{100}} - 8 \beta^{\frac{147}{125}} \log \frac{1}{\beta} \right)} < 2 \log^6 T \cdot e^{7 (\log \log T)^2} < e^8 (\log \log T)^2$$

or

$$\frac{1}{2} \beta^{\frac{101}{100}} - 8 \beta^{\frac{147}{125}} \log \frac{1}{\beta} < 8 \frac{(\log \log T)^2}{\log T}.$$

But then it follows from (6.1.5)

$$\beta^{\frac{101}{100}} < 32 \frac{(\log \log T)^2}{\log T}.$$

Therefore using (6.1.7) we could conclude

$$\frac{1}{\log^{\frac{909}{1000}} T} < 32 \frac{(\log \log T)^2}{\log T},$$

which is certainly false if $T > c$. Hence our assumption (6.4.1) led to a contradiction, i. e., our main lemma XI is completely proved.

§ VII. Proof of theorem I

1. After having the proof of the crucial lemma XI we can easily prove theorem I. Let $T > c$ and again

$$(7.1.1) \quad \left(\frac{1}{\log T} \right)^{0.9} \leq \beta \leq b,$$

and consider with a fixed β the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the domain

$$(7.1.2) \quad T \leq v \leq 2T, \quad u \geq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\beta^{\frac{101}{100}}.$$

Forming with the σ_0 defined in (6.2.1) the intervals I_j' and I_j'' , our main lemma asserts that the horizontal strips corresponding to the intervals I_j' do not contain zeros of $\zeta(w)$ for

$$u \geq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\beta^{\frac{101}{100}}.$$

Hence the other ones can only contain zeros in the domain (7.1.2). The number of such strips is according to (3.7.2) at most $3T^\beta \log^4 T$ and a strip can contain according to (4.2.2) at most $2a_2 \log T$ zeros. Hence the domain (7.1.2) contains at most

$$(7.1.3) \quad 6a_2 T^\beta \log^5 T$$

zeros of $\zeta(w)$ provided that the provisions of (7.1.1) hold.

2. Now we estimate for $T > c$ the number N_1 of the zeros of $\zeta(w)$ in the domain

$$(7.2.1) \quad \sqrt[4]{T} \leq v \leq T, \quad u \geq 1 - \frac{\beta}{2} + 200\beta^{\frac{101}{100}}$$

when $\left(\frac{1}{\log \sqrt[4]{T}} \right)^{0.9} \leq \beta \leq b$. We have to replace T in (7.1.3) by $\frac{T}{2}$,

$\frac{T}{2^2}, \dots, \frac{T}{2^{d_1}}$ where the integer d_1 is determined by

$$\frac{T}{2^{d_1-1}} > \sqrt[4]{T} \geq \frac{T}{2^{d_1}}.$$

So we obtain for N_1 the upper estimation

$$(7.2.2) \quad 6a_2 \log^3 T \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2^j} \right)^j < a_4 T^j \log^{0.9} T < a_4 T^j \log^6 T.$$

3. Now we estimate N_1 defined above when

$$(7.3.1) \quad 0 < \beta \leq \left(\frac{1}{\log \sqrt[4]{T}} \right)^{0.9}.$$

Then for the points of the domain (7.2.1) we have

$$u \geq 1 - \frac{\beta}{2} + 200 \beta^{\frac{101}{100}} > 1 - \frac{\beta}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\log \sqrt[4]{T}} \right)^{0.9} > 1 - 2 \frac{1}{\log^{0.9} v},$$

i. e., in the case of (7.3.1) the whole domain (7.2.1) belongs to a domain in which $\zeta(w) \neq 0$ according to (4.2.4). Hence (7.2.2) holds trivially supposing (7.3.1); thus the estimation (7.2.2) of N_1 is proved for

$$(7.3.2) \quad 0 < \beta \leq b,$$

provided that $T > c$.

4. To obtain the estimation of

$$N \left(1 - \frac{\beta}{2} + 200 \beta^{\frac{101}{100}}, T \right),$$

we have only to estimate the number of the zeros of $\zeta(w)$ in the domain

$$(7.4.1) \quad 0 < v \leq \sqrt[4]{T}, \quad u \geq 1 - \frac{\beta}{2}.$$

This can be done e. g. by the estimation (1.1.3) of CARLSON—HOHEISEL. This gives the upper estimation

$$(7.4.2) \quad a_5 (T^4)^{4 \frac{\beta}{2}} \log^6 T = a_4 T^{\frac{\beta}{2}} \log^6 T.$$

(7.4.2) and (7.3.2) together give the estimation

$$(7.4.3) \quad N \left(1 - \frac{\beta}{2} + 200 \beta^{\frac{101}{100}}, T \right) < a_6 T^{\beta} \log^6 T,$$

provided that

$$(7.4.4) \quad T > c, \quad 0 < \beta < b.$$

5. The estimation (7.4.3) is essentially our theorem I; to obtain it in the final form we need only the trivial fact that for the function

$$y = f(x) = 1 - \frac{x}{2} + 200x^{\frac{101}{100}}$$

in the interval

$$0 < x < \frac{1}{404^{\frac{100}{101}}}$$

the inequality

$$(7.5.1) \quad x \leq 2(1-y) + 600(1-y)^{\frac{101}{100}}$$

is valid for

$$f\left(\frac{1}{404^{100}}\right) \leq y \leq 1.$$

Hence if the b in (7.4.4) is $< \frac{1}{404^{100}}$, we can replace $1 - \frac{\beta}{2} + 200\beta^{1.01}$ by σ_1 ; then according to (7.5.1) we have

$$\beta \leq 2(1-\sigma_1) + 600(1-\sigma_1)^{\frac{101}{100}}.$$

Putting this into (7.4.3) our theorem follows.

(Received 13 September 1950)

ТЕОРЕМА КАРЛСОНА В ТЕОРИИ ζ -ФУНКЦИИ РИМАНА

П. ТУРАН (Будапешт)

(Резюме)

После инициативы Бора и Ландау Карлсон открыл теорему, которая в форме Гохейзеля утверждает, что если число корней ζ -функции Римана в параллелограмме $\sigma > \sigma_0$, $1 \leq t \leq T$ плоскости комплексного переменного $s = \sigma + it$ обозначим через $N(\sigma_0, T)$, справедлива оценка

$$(1) \quad N(\sigma_0, T) < c T^{4\sigma_0(1-\sigma_0)} \log^6 T,$$

если только $1 \geq \sigma_0 \geq \frac{1}{2}$; здесь c_1 а в дальнейшем и $c_2, \dots$ обозначают положительные числовые постоянные. Как видно из исследований Гохейзеля и Ю. В. Линника, такие оценки имеют большое значение в различных областях теории чисел, как например, верхняя оценка разности $p_{n+1} - p_n$ (где $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ последовательность простых чисел) в теории распределения простых чисел mod 1 и — обобщив для родственных L -функций — в аддитивной теории чисел; эти результаты являются тем более лучшими, чем лучше можно понизить показатель степени T в (1). Если, например λ постоянная, и для $\frac{1}{2} \leq \sigma_0 \leq 1$

$$(2) \quad N(\sigma_0, T) \leq c_2 T^{\lambda(1-\sigma_0)} \log^6 T,$$

то при всяком $\varepsilon > 0$ для $n > n_0(\varepsilon)$

$$(3) \quad p_{n+1} - p_n < p_n^{1 - \frac{1}{\lambda} + \varepsilon}.$$

Из (1) следует $\lambda = 4$. Из улучшенной оценки Ингэма, согласно которой

$$(4) \quad N(\sigma_0, T) \begin{cases} < c_3 T^{\frac{8}{3}(1-\sigma_0)} \log^5 T, & \text{если } 1 \geq \sigma_0 \geq \frac{5}{6}, \\ < c_3 T^{(1+2\sigma_0)(1-\sigma_0)} \log^5 T, & \text{если } \frac{5}{6} \geq \sigma_0 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

получается $\lambda = \frac{8}{3}$. С другой стороны легко заметить, что $\lambda \geq 2$, то есть $p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$

лучший результат, который можно так получить, и что оценки (1) и (4) „наиболее глубоки“ в левой окрестности $\sigma_0 = 1$. В настоящей работе именно для этой области достигаем результатов, дающих оценку для $N(\sigma_0, T)$ являющуюся лучше предыдущих. Главная теорема доказывает существование таких c_4, c_5 и c_6 что при $T \geq c_4$ и $1 \geq \sigma_0 \leq 1 - c_6$

$$(5) \quad N(\sigma_0, T) < c_5 T^{2(1-\sigma_0) + 600(1-\sigma_0)^{1,01}} \log^6 T.$$

Если из (1) и (4) следует $\lambda \sim 2$ для правой окрестности $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, то (5) даёт этот же

результат для левой окрестности $\sigma_0 = 1$. Возможно того, что $p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$, следует уже из (5).

ÜBER EINE VERSCHÄRFUNG EINES ZAHLENTHEORETISCHEN SATZES VON THUE

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

§ 1.

Durchweg bezeichne p und n eine gegebene Primzahl bzw. natürliche Zahl. Im allgemeinen nennen wir

$$(1) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

einen Punkt oder (n -dimensionalen) Vektor mit den Koordinaten x_i ; oft nennen wir (1) auch das System der Elemente x_i oder eine (n -gliedrige) Folge mit den Gliedern x_i .

Zwei ganzzahlige Systeme

$$(x_1, \dots, x_n), \quad (y_1, \dots, y_n)$$

nennen wir äquivalent, wenn es passende ganze Zahlen a, b ($p \nmid a$) gibt, so daß

$$(2) \quad y_i \equiv ax_i + b \pmod{p}$$

gilt. Es ist klar, daß es dabei in der Tat um einen Äquivalenzbegriff handelt, der in der Menge aller Systeme von n ganzen Zahlen erklärt ist. Die entsprechenden Äquivalenzklassen nennen wir kurz die n -Klassen.

Es erhebt sich die Frage nach einem möglichst engen Zahlintervall, der aus jeder n -Klasse alle Koordinaten mindestens eines Repräsentanten $(x_1, \dots, x_n)$ enthält. Offenbar darf dieses Intervall ohne Einschränkung der Allgemeinheit in der Form $(0, L)$ mit einer ganzen Zahl L ($0 \leq L < p-1$) angenommen werden. Dann ist $L = L_n(p)$ eine (eindeutige) Funktion von p und n , die wir das n -te Affinmaß für p nennen können.¹ Wir beweisen den

¹ Würde man in (2) statt der „Affinitäten“ $y \equiv ax + b \pmod{p}$ die „Projektivitäten“

$$y \equiv \frac{ax+b}{cx+d} \pmod{p}$$

zulassen, so könnte man entsprechend das „ n -te projektive Maß für p “ definieren, dessen Bestimmung ein sehr schwieriges Problem zu sein scheint.

SATZ. Es gilt

$$(3) \quad L_n(p) \leq \frac{2}{\sqrt[n-1]{n}} \sqrt[n-1]{p^{n-2}} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Später unten werden wir zeigen, daß aus einem elementaren Satz von THUE² sehr leicht die schwächere Abschätzung

$$(4) \quad L_n(p) \leq 2 \left(\left\lfloor \sqrt[n-1]{p} \right\rfloor + 1 \right)^{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

folgt, wobei $[z]$ die größte ganze Zahl $\leq z$ bezeichnet; deshalb ist unser Satz als eine Verschärfung dieses Thueschen Satzes anzusehen.

Zum Beispiel gilt nach (3)

$$L_2(p) < 1, \quad L_3(p) < \sqrt{\frac{4p}{3}}, \quad L_4(p) \leq \sqrt[3]{2p^2}, \quad L_5(p) \leq \sqrt[4]{\frac{16p^3}{5}}.$$

(Insbesondere gilt aber trivial $L_2(p) = 1$).

Unseren Satz werden wir mit Hilfe eines sehr allgemeinen früheren Satzes von uns gewinnen,³ den wir ein endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes (über die Gitterpunkte) genannt und mit seiner Hilfe schon früher⁴ einige Resultate über gewisse Verteilungsfragen der Potenzreste mod p gewonnen haben. Einen Teil der letzteren hat auch KANOLD⁵ bekommen und daraus einige weitere Schlüsse gezogen.

§ 2.

Mit R_n bezeichnen wir den n -dimensionalen Euklidischen Raum, dessen Punkte wir in der Form (1) annehmen. Die Punkte von R_n mit ganzen Koordinaten nennen wir Gitterpunkte.

Mit K_p bezeichnen wir den (endlichen) Primkörper von der Charakteristik p mit dem Einselement ϵ .

Unter dem $n-1$ -dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_{n-1}$ über K_p verstehen wir wie üblich die Menge der Punkte

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (\xi_i \in K_p; \text{ nicht alle } \xi_i = 0),$$

wobei in den Koordinaten ein gemeinsamer Faktor ($\neq 0$) gleichgültig bleibt.

² THUE, Et par antydninger til en taltheoretisk metode, *Christiania Videnskabs-Selskabs Forh.*, 1902, No. 7, S. 1—21.

³ L. RÉDEI, Endlich-projektivgeometrisches Analogon des Minkowskischen Fundamentalsatzes, *Acta Math.*, **84** (1950), S. 155—158.

⁴ L. RÉDEI, Über die Anzahl der Potenzreste mod p im Intervall $1, \sqrt[n]{p}$, *Nieuw Archief voor Wiskunde, Groningen*, **23** (1950):2; S. 272—281.

⁵ H. J. KANOLD, Eine Bemerkung zur Verteilung der r -ten Potenznichtreste einer ungeraden Primzahl, *Journal für reine und angew. Math.*, **188** (1950), S. 74—77.

Einem Gitterpunkt $x = (x_1, \dots, x_n)$ von R_n mit nicht lauter durch p teilbaren Koordinaten x_i ordnen wir den Punkt

$$(x_1\varepsilon, \dots, x_n\varepsilon)$$

von $\mathfrak{P}_{n-1}$ zu, den wir auch mit $(x_1, \dots, x_n)\varepsilon$ bezeichnen.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir vorläufig eine beliebige Punktmenge in R_n (später soll $\mathfrak{M}$ ein konvexer Körper sein). Wir sagen, daß $\mathfrak{M}$ den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erzeugt, wenn die den Gitterpunkten (mit nicht lauter durch p teilbaren Koordinaten) zugeordneten Punkte von $\mathfrak{P}_{n-1}$ den ganzen Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erschöpfen.

Für eine positive Zahl c bezeichne $c\mathfrak{M}$ das c -fache von $\mathfrak{M}$, d. h. die Menge aller cx ($x \in \mathfrak{M}$).

Mit $\mathfrak{D}$ bezeichnen wir den zentralsymmetrischen konvexen Körper mit dem Mittelpunkt 0, dessen Punkte x durch die Ungleichungen

$$(5) \quad |x_i|, \quad |x_i - x_k| \leq 1 \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

definiert sind. Offenbar ist $\mathfrak{D}$ die konvexe Hülle des Einheitswürfelpaars

$$(6) \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad -1 \leq x_i \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Diesen Körper nennen wir nach MINKOWSKI eine *Doppelwabe*. Es ist klar, daß

$$(7) \quad V(\mathfrak{D}) = 2^n + 1$$

ist, wobei V das Volumen für konvexe Körper bezeichnet.

HILFSSATZ. Für $n \geq 1$ ist $L_{n+1}(p)$ gleich der kleinsten positiven Zahl c_0 , wofür der Körper $c_0\mathfrak{D}$ den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erzeugt.

Vor allem ist nämlich klar, daß die Zahl c_0 existiert. Zuerst beweisen wir

$$(8) \quad L_{n+1}(p) \leq c_0.$$

Hierzu betrachten wir eine beliebige $n+1$ -Klasse. Nach der Definition gibt es in dieser einen Repräsentanten von der Form

$$(9) \quad (g_1, \dots, g_n, 0).$$

Vorläufig lassen wir den Fall $p \nmid g_1, \dots, g_n$ beiseite. Wegen der Bedeutung von c_0 gibt es in $c_0\mathfrak{D}$ einen Gitterpunkt x mit

$$(10) \quad (x_1, \dots, x_n)\varepsilon = (g_1, \dots, g_n)\varepsilon,$$

für den dann nach (5) auch

$$(11) \quad |x_i|, \quad |x_i - x_k| \leq c_0 \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

gilt. Wegen (10) existiert eine ganze Zahl a mit $p \nmid a$ und

$$(12) \quad x_i \equiv ag_i \pmod{p} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle **a)**, **b)**.

a) Wenn alle $x_i \geq 0$ sind, so gilt nach (11)

$$(13) \quad 0 \leq x_i \leq c_0 \quad (i = 1, \dots, n,$$

ferner ist (9) nach (12) äquivalent zu

$$(14) \quad (x_1, \dots, x_n, 0).$$

In diesem Falle enthält also die betrachtete $n+1$ -Klasse einen Repräsentanten (14), dessen sämtliche Elemente wegen (13) im Intervall $(0, c_0)$ liegen, und das gilt trivial auch im oben ausgeschlossenen Falle $p \nmid g_1, \dots, g_n$.

b) Wenn unter den x_i auch negative vorkommen, so bezeichne $x_t (< 0)$ ein kleinstes unter allen x_i . Wir setzen

$$(15) \quad y_i = x_i - x_t, \quad y_{n+1} = -x_t \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wegen (11) gilt dann

$$(16) \quad 0 \leq y_i \leq c_0 \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

Setzt man für einen Augenblick $g_{n+1} = 0$, $x_t = -b$, so folgt aus (12), (15)

$$y_i \equiv ag_i + b \pmod{p} \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

Hiernach ist $(y_1, \dots, y_{n+1})$ mit (9) zusammen ein Repräsentant der betrachteten $n+1$ -Klasse. Wegen (16) haben wir ein ähnliches Resultat wie im vorigen Falle, aus beiden folgt die Richtigkeit von (8).

Zum vollständigen Beweis des Hilfssatzes zeigen wir dann die Umkehrung

$$(17) \quad c_0 \leq L_{n+1}(p)$$

von (8). Hierzu betrachten wir einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{P}_{n+1}$, den wir in der Form

$$(18) \quad (g_1, \dots, g_n)\varepsilon$$

mit ganzen, nicht lauter durch p teilbaren g_i annehmen dürfen. Wegen der Definition ist das System

$$(19) \quad (g_1, \dots, g_n, 0)$$

äquivalent einem (ganzzahligen) System

$$(20) \quad (x_1, \dots, x_{n+1}),$$

wofür

$$(21) \quad 0 \leq x_i \leq L_{n+1}(p) \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

gilt. Offenbar dürfen wir dabei annehmen, daß mindestens ein $x_i = 0$ ist. Dann gibt es ganze Zahlen a, b mit $p \nmid a$ und

$$(22) \quad x_i \equiv ag_i + b \pmod{p}, \quad x_{n+1} \equiv b \pmod{p} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wieder unterscheiden wir zwei Fälle c), d).

c) Wenn $p \mid b$ ist, so besagt (22) die Gleichheit

$$(23) \quad (g_1, \dots, g_n)\varepsilon = (x_1, \dots, x_n)\varepsilon,$$

somit ist der Punkt (18) dem Gitterpunkt x zugeordnet, der wegen (21) im Körper $L_{n+1}(p) \mathfrak{D}$ liegt.

d) Wenn $p \nmid b$ ist, so gilt $p \nmid x_{n+1}$, also muß nach der Annahme ein $x_i \neq 0$ sein ($i = 1, \dots, n$). Man darf annehmen, daß eben $x_1 \neq 0$ ist. Dann folgt aus (22)

$$b \equiv -ag_1 \pmod{p},$$

also

$$x_i \equiv a(g_i - g_1) \pmod{p}, \quad x_{n+1} \equiv -g_1 \pmod{p} \quad (i = 2, \dots, n).$$

Dies ergibt

$$(24) \quad -x_{n+1} \equiv ag_1 \pmod{p}, \quad x_i - x_{n+1} \equiv ag_i \pmod{p} \quad (i = 2, \dots, n).$$

Die linken Seiten bezeichnen wir mit

$$(25) \quad y_1 \equiv -x_{n+1}, \quad y_i = x_i - x_{n+1} \quad (i = 2, \dots, n).$$

Dann gilt wegen (24)

$$(26) \quad (y_1, \dots, y_n)\varepsilon = (g_1, \dots, g_n)\varepsilon.$$

Andererseits folgt aus (21), (25)

$$|y_i|, |y_i - y_k| \leq L_{n+1}(p) \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

folglich ist y ein Punkt von $L_{n+1}(p)\mathfrak{D}$. Wieder ist also nach (26) der betrachtete Punkt (18) einem Gitterpunkt von $L_{n+1}(p)\mathfrak{D}$ zugeordnet, somit folgt aus der Definition von c_n die Richtigkeit der Ungleichung (17). Dies mit (8) zusammen beweist den Hilfssatz.

§ 3.

Der zu verwendende Satz aus der Arbeit³ lautet so: Ist $\mathfrak{A}_r$ ein r -dimensionaler linearer Unterraum des projektiven Raumes $\mathfrak{P}_{n-1}$, ferner $\mathfrak{M}$ ein konvexer Körper in R_n mit dem Mittelpunkt 0 und dem Volumen

$$(27) \quad V(\mathfrak{M}) \geq 2^n p^{n-r-1} \quad (r = 0, \dots, n-1),$$

der keinen Gitterpunkt $\neq 0$ mit lauter durch p teilbaren Koordinaten enthält, so gibt es in $\mathfrak{M}$ einen Gitterpunkt $\neq 0$, dem ein Punkt von $\mathfrak{A}_r$ zugeordnet ist.

Dabei sind die linearen Unterräume wie üblich zu definieren. Insbesondere sind die $\mathfrak{A}_0$ (Fall $r = 0$) die sämtlichen Punkte von $\mathfrak{P}_{n-1}$, folglich ergibt dieser Satz, daß $\mathfrak{M}$ im Falle

$$(28) \quad V(\mathfrak{M}) \geq 2^n p^{n-1}$$

(bei sonst unveränderten Annahmen) den Raum $\mathfrak{P}_{n-1}$ erzeugt.

Da nach (7)

$$(29) \quad V(c\mathfrak{D}) = (n+1)c^n \quad (c > 0)$$

ist, so gilt

$$(30) \quad V(c\mathfrak{D}) = 2^n p^{n-1} \quad \left(c = \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} \sqrt[n]{p^{n-1}} \right).$$

Nach obigem erzeugt also dieser Körper $c\mathfrak{D}$ den Raum $\mathfrak{F}_{n+1}$, folglich gilt für dieses c und für das c_0 im Hilfssatz die Ungleichung $c_0 \leq c$. Das bedeutet

$$L_{n+1}(p) \leq \frac{2}{n+1} \left\lceil \frac{n}{p^{n-1}} \right\rceil.$$

Dies stimmt mit (3) überein, womit der Satz bewiesen ist.

§ 4.

Wir wollen auseinandersetzen, daß unser Satz als eine Verschärfung eines Satzes von THUE anzusehen ist. Der gemeinte Satz von THUE² lautet mit unwesentlicher Umformulierung so: Ist $p(\neq 0)$ eine ganze Zahl (nicht notwendig Primzahl) und $(a_1, \dots, a_n)$ ein ganzzahliges System, in welchem alle a_i zu p prim sind, bezeichnet ferner k die ganze Zahl mit

$$(31) \quad (k-1)^n < p \leq k^n,$$

so gibt es ganze Zahlen $r_1, \dots, r_n, q$ ($p \nmid q$) mit

$$(32) \quad qa_i \equiv r_i \pmod{p}, \quad |r_i| \leq k^{n-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Betrachten wir hiervon nur den Fall einer Primzahl p . Dann gilt

$$(33) \quad k = [\sqrt[n]{p}] + 1.$$

Der Satz läßt sich auch auf solche Systeme $(a_1, \dots, a_n)$ anwenden, in denen (mindestens) ein durch p teilbares a_i vorkommt, und zwar liefert dann der Satz für die r_i (bei Anwendung mit $n-1$ statt n) die schärfere Abschätzung

$$(34) \quad |r_i| \leq k^{n-2}, \quad k = [\sqrt[n-1]{p}] + 1.$$

Da es nun in jeder n -Klasse auch solche Repräsentanten $(a_1, \dots, a_n)$ gibt, in denen ein a_i verschwindet, so besagt THUES Satz für unser Problem, daß jede n -Klasse einen Repräsentanten im Intervall $(-k^{n-2}, k^{n-2})$ enthält, wobei k den in (34) angegebenen Wert hat. Das gilt dann auch für das Intervall $(0, 2k^{n-2})$, somit führt THUES Satz zur Abschätzung $L_n(p) \leq 2k^{n-2}$. Nach (34) stimmt dies mit (4) überein.

Ob sich (3) weiter verschärfen läßt, scheint eine sehr schwierige Frage zu sein. Soviel läßt sich sagen, daß sich unser Verfahren nicht verbessern läßt. Das hat seinen Grund darin, daß sich der Raum R_n durch gitterförmig angeordneten Doppelwaben $\mathfrak{D}$ einfach und lückenlos ausfüllen läßt, für solche Körper läßt sich bekanntlich selbst der (unseren Untersuchungen zugrunde liegende) Fundamentalsatz von MINKOWSKI nicht schärfer formulieren.

Insbesondere für $n = 3$ scheint die gefundene Abschätzung

$$(35) \quad L_3(p) \leq \sqrt[3]{\frac{4p}{3}}$$

die bestmögliche zu sein, denn für die Primzahlen von der Form

$$(36) \quad p = 3t^2 + 3t + 1$$

läßt sich leicht

$$L_3(p) = 2t + 1$$

beweisen, andererseits liefert (35) für diesen Fall die Abschätzung

$$L_3(p) \leq \sqrt{(2t+1)^2 + \frac{1}{3}};$$

beide stimmen im wesentlichen überein. Man weiß aber nicht, ob es unendlich viele Primzahlen (36) gibt, weshalb hierdurch noch nicht entschieden ist, ob die Abschätzung (35) für unendlich viele p bestmöglich ist.

(Eingegangen am 21. März 1951.)

ОБОСТРЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ТУЭ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

Пусть p простое число, $n \geq 2$ целое число. Рассмотрим все системы $S_n = (x_1, \dots, x_n)$ [$x_1, \dots, x_n$ целые числа]. Пусть $S'_n = (y_1, \dots, y_n)$ другая такая система. Мы говорим, что S_n эквивалентно с S'_n , если существуют 2 таких целых числа a, b , что

$$y_i \equiv ax_i + b \pmod{p} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть $L = L_n(p)$ наименьшее целое положительное число, для которого справедливо, что интервал $(0, L)$ содержит по крайней мере одного представителя $S_n = (x_1, \dots, x_n)$ из каждого класса эквивалентных систем. Тогда

$$L_n(p) \leq \frac{2}{\sqrt[n-1]{n}} \sqrt[n-1]{p^{n-2}}.$$

Доказательство производится на основе одной предыдущей теоремы автора³. Из одной теоремы Туэ² вытекает более слабая оценка

$$L_n(p) \leq 2(\sqrt[n-1]{p} + 1)^{n-2}.$$

ON COMPOSED POISSON DISTRIBUTIONS, II

By

ALFRÉD RÉNYI (Budapest), corresponding member of the Academy

Introduction

The present paper is a continuation of a joint paper of L. JÁNOSSY, J. ACZÉL and the author [1]. It consists of four parts. In § 1 the general form of inhomogeneous stochastic processes of random events is obtained (Theorem 1). This § is a generalization of § 2 of the paper [1] cited above. In § 2 of the present paper, the following problem is solved: let us suppose that every event in a composed Poisson process is the starting point of a happening, which has a definite duration, being also a random variable; it is to be taken into consideration that the distribution law of the duration of a happening may depend on the time when the happening started; we ask about the probability distribution of the number r_t of happenings going on at some time t . We shall prove that this distribution is also a composed Poisson distribution (Theorem 2). This problem for the case the underlying process of random events is an ordinary Poisson process, has been solved recently by the author, in the paper [2], where applications of this problem to several physical and technical questions (radioactive disintegration, telephone engineering, flight of electrons in a vacuum tube) are also mentioned. Another application is mentioned in § 3 of the present paper. In § 3 the general composed Poisson distribution is obtained as limiting distribution of sums of integer-valued independent random variables; as a matter of fact, it is proved (Theorem 3) that if $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ are independent integer-valued random variables, which are „infinitely small“, i. e. if we suppose

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0,$$

and if the distributions of the sums

$$(2) \quad \eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}$$

are tending to a non-degenerated limiting distribution for $n \rightarrow \infty$, this limiting distribution is necessarily a composed Poisson distribution. Necessary and

sufficient conditions for the convergence of the distributions of the sums (2) are also found, by applying a theorem of B. V. GNEDENKO and A. N. KOLMOGOROFF [3]. This result is closely connected with the fact established in § 4 (Theorem 4) that the class of composed Poisson distributions may be characterized as the class of infinitely divisible distributions of integer-valued random variables, which assume the value 0 with positive probability.

The theory of composed Poisson distributions, as developed in [1] and the present paper, is now in many respects complete; but the possibilities of applications of these distributions are far from being explored.

I am thankful to Á. CSÁSZÁR for his valuable remarks which I utilized in preparing the manuscript of the present paper.

§ 1. Non-homogeneous composed Poisson processes

Let the process start at $t = 0$, and let us denote by ζ_t ($t \geq 0$) the number of events which occur in the time interval $(0, t)$. The following assumptions are made:

A) If $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_r < t_r$, the random variables $\zeta_{t_1} - \zeta_{s_1}, \zeta_{t_2} - \zeta_{s_2}, \dots, \zeta_{t_r} - \zeta_{s_r}$ are independent.

B) Let $W_k(s, t)$ denote the probability of exactly k events occurring in the time interval (s, t) , i. e. let us put $(s < t; k = 0, 1, 2, \dots)$

$$(1.1) \quad W_k(s, t) = P(\zeta_t - \zeta_s = k);$$

we suppose, that for an arbitrary small $\varepsilon > 0$ and any arbitrary large $T > 0$, a positive number $\delta > 0$ can be found such that for arbitrary $r = 1, 2, \dots$ and $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_r < t_r < T$ for which

$$\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) < \delta,$$

we have

$$(1.2) \quad \prod_{j=1}^r W_0(s_j, t_j) > 1 - \varepsilon.$$

Condition **B)** postulates the „rarity“ of the events forming our process in the sense that it is highly probable that no event will take place during a sufficiently short time consisting of an arbitrary number of time intervals. In [2] a second „rarity“ condition (Condition C) excluding multiple events, has also been postulated; in the present paper this condition is dropped.

We shall prove the following

THEOREM 1. *Under conditions A) and B), denoting by*

$$(1.3) \quad \varphi(s, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(s, t) z^k$$

the generating function of our process, we have

$$(1.4) \quad \log q(s, t, z) = \sum_{r=1}^{\infty} (z^r - 1) \int_s^t c_r(\tau) d\tau$$

where the $c_r(\tau)$ are non-negative integrable functions and $\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\tau)$ converges almost everywhere. In other words we have

$$W_k(s, t) = \exp \left(- \sum_{r=1}^{\infty} \int_s^t c_r(\tau) d\tau \right) \cdot \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{\left(\int_s^t c_j(\tau) d\tau \right)^{r_j}}{r_j!}.$$

Thus ξ_t is distributed according to a composed Poisson law for every $t > 0$.

Proof. Let us put

$$(1.5) \quad -\log q(s, t, z) = \psi(s, t, z);$$

we have evidently

$$(1.6) \quad q(s, \tau, z) q(\tau, t, z) = q(s, t, z)$$

and thus

$$(1.7) \quad \psi(s, \tau, z) + \psi(\tau, t, z) = \psi(s, t, z)$$

for $s \leq \tau \leq t$.

Taking into account that $0 \leq q(s, t, z) \leq 1$ for all real positive $z \leq 1$, it follows that

$$(1.8) \quad \psi(s, t, z) = \psi_z(I)$$

is an additive function of the interval $I = (s, t)$, which is non-negative for $0 \leq z \leq 1$. We shall prove that for $s \leq t \leq T$, $\psi_z(I)$ is absolutely continuous, uniformly for $|z| \leq 1$. As a matter of fact, let us suppose that $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < \dots < t_2 < \dots < s_r < t_r \leq T$ and $\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) \leq \delta$, where δ is chosen so that (1.2) holds

for some $\varepsilon > 0$. In what follows we shall always suppose that $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$, which implies that $W_0(s_j, t_j) > \frac{3}{4}$; it follows that

$$(1.9) \quad q(s_j, t_j, z) \geq W_0(s_j, t_j) - \sum_{k=1}^{\infty} W_k(s_j, t_j) = 2W_0(s_j, t_j) - 1 > \frac{1}{2} > 0$$

and

$$|1 - q(s_j, t_j, z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} W_k(s_j, t_j) |1 - z^k| \leq 2(1 - W_0(s_j, t_j)) < \frac{1}{2}.$$

Thus $q(s_j, t_j, z)$ is different from zero in the closed unit circle $|z| \leq 1$ and therefore $\psi_z(I_j) = -\log q(s_j, t_j, z)$ is analytic in the unit circle. Using the

inequality $\left| \log \frac{1}{1-\alpha} \right| \leq 2|\alpha|$, valid for any complex α , with $|\alpha| < \frac{1}{2}$, we obtain

$$|\psi_z(I_j)| = \left| \log \frac{1}{1-(1-\varphi(s_j, t_j, z))} \right| \leq 2|1-\varphi(s_j, t_j, z)| \leq 4(1-W_0(s_j, t_j))$$

and taking into account that $\alpha \leq \log \frac{1}{1-\alpha}$ for $0 < \alpha < 1$, we obtain, using (1. 2), that

$$(1. 10) \quad \sum_{j=1}^r |\psi_z(I_j)| \leq 4 \sum_{j=1}^r (1-W_0(s_j, t_j)) \leq 4 \log \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{W_0(s_j, t_j)} \right) \leq 4 \log \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

As we have remarked above, $\psi_z(I_j)$ is analytic in the unit circle; thus we may put

$$(1. 11) \quad \psi_z(I_j) = c_0(I_j) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I_j) z^k$$

where $c_k(I)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) are functions of the interval $I=(s, t)$. It follows, by CAUCHY's formula, that

$$c_0(I) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\psi_z(I)}{\tilde{\gamma}} d\tilde{\gamma}$$

and

$$(1. 12) \quad c_k(I) = -\frac{k!}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}^{k+1}} \frac{\psi_z(I)}{\tilde{\gamma}^{k+1}} d\tilde{\gamma} \quad \text{for } k=1, 2, \dots$$

where the integration is extended over the circle $|\tilde{\gamma}| = r < 1$. But using (1. 10)

if $\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) < \delta$ and $I_j = (s_j, t_j)$, we have

$$\sum_{j=1}^r |c_k(I_j)| \leq \frac{8\varepsilon \cdot k!}{r^k}$$

and thus $c_k(I)$ are also absolutely continuous additive functions of interval. Thus we may put

$$c_k(I) = \int_s^t c_k(\tau) d\tau$$

where $c_k(\tau)$ is L -integrable, $k=0, 1, 2, \dots$. Now we shall prove that $c_k(\tau) \geq 0$ for $k=1, 2, \dots$. This can be proved by the same method, as used in [1], by showing the non-negativity of the coefficients c_k figuring there, as follows. We shall prove that

$$(1. 13) \quad c_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_k(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \quad (k=1, 2, \dots)$$

for almost every t , and thus $c_k(t) \geq 0$ for $k=1, 2, \dots$. As a matter of fact, we have

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_k(t, t+\Delta t) z^k = e^{-\psi_z(\Delta t)}$$

where $\Delta t = (t, t + \Delta t)$. Differentiating both sides k times with respect to z and substituting $z=0$, we obtain

$$k! W_k(t, t + \Delta t) = \left[-\psi_0^{(k)}(\Delta t) + \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (k-1)\alpha_{k-1} = k} c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} (-\psi_0^{(j)}(\Delta t))^{\alpha_j} \right] e^{-\psi_0(\Delta t)}$$

where $c_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}}$ are numerical coefficients, α_j are non-negative integers, $j = 1, 2, \dots, k-1$. As $\psi_0^{(j)}(\Delta t) = j! c_j(\Delta t)$, we have for $z = 1$ and almost every t , $\psi_0^{(j)}(\Delta t) = o(\Delta t)$ for $j = 1, 2, \dots, k-1$, if k is fixed, and thus we obtain, using $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} \geq 2$ for $k > 2$ that

$$k! W_k(t, t + \Delta t) = [-\psi_0^{(k)}(\Delta t) + o(\Delta t)] e^{-\psi_0(\Delta t)}$$

and therefore (1.13) follows. Thus $c_0(I) = \psi_1(I) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I) z^k$ is a power series with non-negative coefficients. Thus taking into account that $\psi_1(I) = 0$ and consequently $\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I) z^k = c_0(I)$, we obtain that $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(I)$ converges and its sum equals $c_0(I)$, and therefore we may write

$$\psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(I) (1 - z^k).$$

Thus Theorem 1 is proved.

If the process is homogeneous, $c_k(t)$ does not depend on t , $c_k(t) = c_k$ ($k = 1, 2, \dots$) and we obtain as a special case the results of [1] § 2. If $c_k = 0$ for $k = 2, 3, \dots$ we obtain the ordinary Poisson process. Let us mention that in case of an inhomogeneous Poisson process the inhomogeneity is not essential, as it can be eliminated by a change of the scale of time. As a matter of fact, we have only to put $t' = \int_0^t c_1(\tau) d\tau$. On the other hand, in the case of inhomogeneous composed Poisson processes this is not possible, because by introducing a new time scale we can make one arbitrarily chosen $c_k(t)$ constant, but in general not all of them at the same time. Thus there exist „genuinely“ inhomogeneous composed Poisson processes.

§ 2. The distribution law of η_t

The following theorem will be proved:

THEOREM 2. *Let us start from an inhomogeneous Poisson process of random events, the characteristic function of which is given by (1.3) and (1.4).*

We suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k(t) = \mu(t)$ converges and is L -integrable, i. e. that the mean value of ζ_t exists for every $t > 0$. Let us suppose that each event of this

process is the starting point of some happening, the duration of which depends also on chance, and let $F(t, x)$ denote the distribution function of the duration of a happening starting at time t and let us put $\Phi(t, x) = 1 - F(t, x)$; we suppose that $\Phi(t, x)$ is continuous, further that $\Phi(t, x) > 0$ for all t and x .¹ Let us denote by ν_t the number of happenings going on at time t . The law of distribution of ν_t is a composed Poisson distribution, with generating function

$$(2.1) \quad \chi(z, t) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)(z^k - 1) \right)$$

where

$$(2.2) \quad d_k(t) = \int_0^t \left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n(\tau) \binom{n}{k} \Phi^k(\tau, t-\tau) (1 - \Phi(\tau, t-\tau))^{n-k} \right] d\tau$$

and $c_n(\tau)$ is defined by (1.4); evidently we have $d_k(t) \geq 0$.

*Proof*². Let us divide the interval $(0, t)$ into n equal parts by means of the points $t_k = \frac{kt}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) and let us denote by JI_k the interval (t_{k-1}, t_k) ; let us put further $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ and

$$(2.3) \quad M_k = \max_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k} \Phi(\tau, t-\tau); \quad m_k = \min_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_k} \Phi(\tau, t-\tau).$$

Let $V_k(r)$ denote the probability that there are exactly r such happenings going on at time t which started in the time interval JI_k ($k = 1, 2, \dots, n$). First we shall prove the following inequality:

$$(2.4) \quad \sum_{s=r}^{\infty} \binom{s}{r} W_s^{(k)} m_k^r (1 - M_k)^{s-r} \leq V_k(r) \leq \sum_{s=r}^{\infty} \binom{s}{r} W_s^{(k)} M_k^r (1 - m_k)^{s-r}$$

where $W_s^{(k)} = W_s(t_{k-1}, t_k)$. In fact, if r happenings are going on at time t , all of which started in the time interval JI_k , there must have been $s \geq r$ events in this interval; now if a happening started exactly at time τ ($t_{k-1} \leq \tau \leq t_k$), the probability that it will continue going on at time t is $\Phi(\tau, t-\tau)$; as we do not know the exact value of τ , only that it lies in JI_k , we can state only that this probability lies somewhere between m_k and M_k ; similarly the probability that the happening considered is finished before t being equal to $F(\tau, t-\tau)$ with τ in JI_k , lies somewhere between $1 - M_k$ and $1 - m_k$.

Now let us introduce the functions

$$(2.5) \quad \chi^{(k)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} V_k(r) z^r \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

¹ If $F(t, x)$ does not depend on t , the condition $\Phi(t, x) > 0$ can be dropped.

² The idea of the proof of Theorem 2 is the same as that applied in § 2 of [2]

It follows from (2.5) and (1.4) that for $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$

$$(2.6) \quad \exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r (\Delta I_k) ((m_k z + 1 - M_k)^r - 1) \right] \leq \\ \leq \chi^{(k)}(z) \leq \exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r (\Delta I_k) ((M_k z + 1 - m_k)^r - 1) \right].$$

(To ensure the convergence of the series in the exponent at the right of (2.6), we choose n sufficiently large, to obtain³ $M_k < 2m_k$.) Denoting the mean value of $\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ by μ_k , we have by (1.4)

$$(2.7) \quad \mu_k = \sum_{n=1}^{\infty} n W_n(t_{k-1}, t_k) = \left(\frac{\partial \psi(s, t, z)}{\partial z} \right)_{z=1} = \sum_{r=1}^{\infty} r c_r (\Delta I_k)$$

(the existence of μ_k has been postulated!), we obtain easily

$$(2.8) \quad \chi^{(k)}(z) = \exp [-\psi(t_{k-1}, t_k, m_k z + 1 - M_k) + \mathfrak{P} \mu_k (M_k - m_k)]$$

with $|\mathfrak{P}| \leq 2$.

Now let $p_N(t)$ denote the probability of exactly N happenings going on at time t . We have evidently

$$(2.9) \quad p_N(t) = \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_n = N} V_1(r_1) V_2(r_2) \dots V_n(r_n)$$

where the summation is extended over all *ordered* n -tuples of non-negative integers $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ satisfying $r_1 + r_2 + \dots + r_n = N$. Let us put

$$(2.10) \quad \chi(z, t) = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) z^N;$$

$\chi(z, t)$ is the generating function of the random variable η_t . According to (2.9) we have

$$(2.11) \quad \chi(z, t) = \prod_{k=1}^n \chi^{(k)}(z)$$

and thus, in view of (2.8)

$$(2.12) \quad \chi(z, t) = \exp \left[-\sum_{k=1}^n \psi(t_{k-1}, t_k, m_k z + 1 - M_k) + \mathfrak{P} \sum_{k=1}^n \mu_k (M_k - m_k) \right]$$

$|\mathfrak{P}| \leq 2$. Now, if $n \rightarrow \infty$, the second member in the exponent at the right of (2.12) tends to 0, while the limit of the first member is

$$(2.13) \quad \pi(z, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^t c_r(\tau) [\Phi(\tau, t - \tau) z + 1 - \Phi(\tau, t - \tau)]^r d\tau.$$

Thus we obtain

$$\chi(z, t) = e^{\pi(z, t)}.$$

³ We use here that $\Phi(\tau, x) > 0$ and that $\Phi(\tau, x)$ is continuous.

By simple rearrangement we obtain

$$(2.15) \quad \pi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) (z^k - 1)$$

where $d_k(t)$ is defined by (2.2); thus Theorem 2 is proved.

Let us mention that if $c_k(t) = 0$ for $k = 2, 3, \dots$, i. e. if the underlying process is an ordinary Poisson process, we have (cf. [2])

$$(2.16) \quad \pi(z, t) = (z-1) \int_0^t c_1(\tau) \Phi(\tau, t-\tau) d\tau,$$

hence η_t is distributed according to an ordinary Poisson distribution. More generally, let us call a composed Poisson distribution to be of degree D if $c_n(t) = 0$ for $n > D$; it follows that the degree of the distribution of r_t is equal to that of ζ_t (this holds also for $D = \infty$!).

§ 3. Convergence to composed Poisson distributions

In this § we shall prove the following

THEOREM 3. *Let $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ denote non-negative independent integer-valued random variables ($n = 1, 2, \dots$) which are „infinitely small”, that is, let us suppose*

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0.$$

Let us put

$$(3.2) \quad r_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n},$$

further $p_{nks} = P(\xi_{nk} = s)$ and $c_{ns} = \sum_{k=1}^{k_n} p_{nks}$. The necessary and sufficient condition for the convergence of the distribution functions of the sums r_n is the existence of a sequence of non-negative numbers $c_1, c_2, \dots, c_s, \dots$ with the following properties: $\sum_{s=1}^{\infty} c_s$ converges, and $\sum_{s=1}^{\infty} c_s > 0$, further

$$(3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| = 0.$$

If (3.3) is satisfied, the distribution of r_n tends for $n \rightarrow \infty$ to the composed Poisson distribution function having the generating function

$$(3.4) \quad \varphi(z) = \exp \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s (z^s - 1) \right).$$

Proof. We shall deduce Theorem 3 from the following important theorem of B. V. GNEDENKO and A. N. KOLMOGOROFF (Theorem 1 of § 25 of [3]): The necessary and sufficient conditions for the existence of constants A_n ($n = 1, 2, \dots$) ensuring the convergence to a limiting distribution of the

distributions of the sums $\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} - A_n$ of independent, infinitely small random variables, the distribution function of ξ_{nk} being denoted by $F_{nk}(x)$, are as follows: the existence of non-decreasing functions $M(u)$ ($-\infty < u < 0$; $M(-\infty) = 0$) and $N(u)$ ($0 < u < +\infty$; $N(+\infty) = 0$) of bounded variation and of a constant σ such that

a) in every point of continuity of $M(u)$ resp. of $N(u)$ we have

$$(3.5) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(u) = M(u) & \text{for } u < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = N(u) & \text{for } u > 0, \end{cases}$$

b)

$$(3.6) \quad \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \end{cases} \left\{ \sum_{k=1}^{k_n} \left[\int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x| < \varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right] \right\} = \sigma^2.$$

In case the above conditions are satisfied, the constants A_n may be chosen so that

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\beta}^{\beta} x dF_{nk}(x)$$

where β is an arbitrary positive number such that $-\beta$ and β are points of continuity of $M(u)$ resp. of $N(u)$. Denoting by $f(t)$ the characteristic function of the limiting distribution of η_n , we have (formula of P. LÉVY)

$$(3.7) \quad \log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dN(u)$$

where $M(u)$, $N(u)$ and σ are defined as above and γ is a real constant.

In our case the condition that the variables ξ_{nk} are "infinitely small" is equivalent to the condition $\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{k=1, \dots, k_n} p_{nk0} = 1$. We have further $F_{nk}(u) = 0$

for $u < 0$, (thus the first condition of a) is satisfied with $M(u) = 0$) and

$F_{nk}(u) = \sum_{s=1}^n p_{nks}$ for $u > 0$, and therefore, in view of $\sum_{s=1}^{\infty} p_{nks} = 1$,

$$(3.8) \quad \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = - \sum_{s \geq u} c_{ns}.$$

Hence the second condition of a) is equivalent to the existence of the limits

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_{nu} = D_u \quad \text{with} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} D_u = 0$$

for $u = 1, 2, \dots$ where $D_{nn} = \sum_{s=1}^n c_{ns}$. (Clearly the sequence $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ is non-increasing.) Condition **b)** is in our case automatically satisfied with $\sigma = 0$, in view of the fact that for $\varepsilon < 1$ all integrals figuring in (3.6) vanish. For similar reasons, in case conditions (3.9) are satisfied we may choose $A_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Putting $C_n = D_n - D_{n+1}$ (clearly $c_n \geq 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converges), it is evident that (3.9) implies

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{ns} - c_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Of course the contrary of this is not valid, but if we replace the set of conditions (3.10) by the single one

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n c_{ns} = c = 0,$$

then it is easy to see that (3.11) is equivalent to the set of conditions (3.9). As a matter of fact, let us show that (3.9) follows from (3.11) and vice versa. If (3.11) is satisfied, we have

$$(3.12) \quad |D_{nn} - D_n| = \left| \sum_{s=1}^n (c_{ns} - c_s) \right| \leq \sum_{s=1}^n |c_{ns} - c_s|,$$

thus (3.9) is valid for every $n = 1, 2, \dots$. Conversely, from (3.9) it follows

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \sum_{s=1}^n |c_{ns} - c_s| = \\ &= \sum_{s=1}^n (c_{ns} - c_s) + 2 \sum' (c_s - c_{ns}) \leq D_{n+1} - D_1 + 2 \sum_{s=N}^{\infty} c_s + 2N\varepsilon_n^{(N)} \end{aligned}$$

where $\sum'$ is extended only over those values of s for which $c_s - c_{ns} > 0$, and $\varepsilon_n^{(N)} = \max_{s \leq N} |c_s - c_{ns}|$; thus

$$(3.14) \quad \sum_{s=1}^n |c_{ns} - c_s| \leq D_{n+1} - D_1 + 2D_N + 2N\varepsilon_n^{(N)}.$$

Clearly $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(N)} = 0$ for every fixed value of N , according to (3.10). Now let us choose N sufficiently large to obtain $D_N < \frac{\varepsilon}{6}$ and then n_0 sufficiently

large so as to ensure $|D_{n+1} - D_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ and $\varepsilon_n^{(N)} < \frac{\varepsilon}{6N}$ for $n \geq n_0$. It follows that the right-hand side of (3.14) is $< \varepsilon$ for $n \geq n_0$, which is equivalent to (3.11). Therefore if and only if (3.3) is valid, the conditions of the theorem of B. V. GNEDENKO and A. N. KOLMOGOROFF are satisfied with $M(u) = 0$ and $N(u) = \sum_{s=1}^u c_s$, $\sigma = 0$ and $A_n = 0$ and thus the distribution function of the sum $\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nh_n}$ converges to a limiting distribution having

the characteristic function $f(t)$, where

$$\log f(t) = i\gamma t + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+s^2} \right) dN(u) - \sum_{s=1}^{\infty} c_s (e^{is^2 t} - 1) + it \left(\gamma - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sc_s}{1+s^2} \right).$$

As η_n assumes only non-negative integer values, and $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n = 0) = 0$,⁴ we

must have (see § 4) $\gamma = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sc_s}{1+s^2}$ and thus

$$f(t) = \exp \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s (e^{is^2 t} - 1) \right)$$

which is equivalent to (3.4), owing to $f(t) = g(e^t)$. Thus Theorem 3 is completely proved.

This limit theorem suggests new applications of composed Poisson distribution. For example, let us consider the mixture of two or more grained materials having different specific weights. In particular, suppose that there are only two materials and the ratio of their specific weights is 1:2. The specific weight of the mixture will be evidently a mean value of the specific weights of the components, the factors being proportional to the quantities (volumes) of the different components. But if we investigate the specific weight of small parts of the mixture, we shall find that it fluctuates around the mentioned value and we may ask about the distribution law of this specific weight. Clearly we can construct a simple urn-model which describes adequately the mentioned situation, and it follows by Theorem 3 that the distribution of the specific weight of a selected small portion of the mixture is approximately a composed Poisson distribution with generating function $\exp(c_1(z-1) + c_2(z^2-1))$. The same consideration can be applied to the specific weight of small parts of an alloy of two or more different metals, etc.

§ 4. Characterization of composed Poisson distributions

Finally let us prove the following theorem, which throws light on the above results.

⁴ We have $P(\eta_n = 0) = \prod_{k=1}^{k_n} p_{nk0} = \prod_{k=n}^{k_n} \left(1 - \sum_{s=1}^{\infty} p_{nks} \right)$, as by

$$(3.1) \quad \lim_{1 \leq k \leq k_n} \max \left(\sum_{s=1}^{\infty} p_{nks} \right) = 0 \text{ we have } \sum_{s=1}^{\infty} p_{nks} < \frac{1}{2} \text{ for } n \geq n_0,$$

and using $1-x > e^{-2x}$ for $0 < x < \frac{1}{2}$, it follows

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta_n = 0) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-2 \sum_{s=1}^{\infty} c_{ns}} = e^{-2 \sum_{s=1}^{\infty} c_s} > 0.$$

THEOREM 4. *The class of composed Poisson distributions can be characterized as the class of infinitely divisible distributions of non-negative, integer-valued random variables, which assume the value 0 with a probability > 0 .*

Proof. We start from the canonical form

$$(3.15) \quad \log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\gamma}^0 \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dN(u)$$

(where γ and σ are real numbers, $M(u)$ and $N(u)$ non-decreasing functions of bounded variation in the intervals $(-\infty, 0)$ resp. $(0, +\infty)$, and $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$) of the logarithm of the characteristic function of an infinitely divisible distribution. The logarithm of the characteristic function of a composed Poisson distribution is of the form

$$(3.16) \quad \log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int} - 1) \quad \text{with } c_n \geq 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

Putting $\sigma = 0$, $M(u) = 0$ in (3.15) and choosing for $N(u)$ the following function:

$$N(u) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{for } u > 0 \quad \text{and putting } \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n}{1+n^2},$$

we conclude that every composed Poisson distribution is infinitely divisible. As a matter of fact this can be seen also by taking into account that any composed Poisson distribution is the convolution of a finite or an enumerably infinite number of Poisson distributions (see [1]). Conversely, let us suppose that the variable ξ assumes only non-negative integer values and its distribution is infinitely divisible, i. e. for any $n = 2, 3, 4, \dots$ it can be represented in the form $\xi = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}$ where the variables $\xi_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) are independent and equally distributed. Denoting by $f(t)$ the characteristic function of ξ , we know that $\log f(t)$ can be represented in the form (3.15). Clearly $\sigma = 0$, because if not, the distribution function of ξ would be continuous. As a matter of fact, let us put

$$f(t) = f_1(t)f_2(t)$$

where $f(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. As $f_2(t)$ is the characteristic function of the normal distribution function $F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$, if $F(x)$ denotes the distribution

function of ξ and $F_1(x)$ the infinitely divisible distribution function whose characteristic function is equal to $f_1(t)$, we have

$$F(x) = \int_{-\infty}^x F_2(x-y) dF_1(y).$$

Taking into account that $F_1(a+h) - F_2(a) = \frac{|h|}{2\pi a}$, it follows that $F(x+h) - F(x) = \frac{|h|}{2\pi a}$, which means that $F(x)$ is a continuous function; this contradicts our assumption that ξ assumes only non-negative integer values. But since

$$(3.17) \quad f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k e^{i k t} \quad (P_k = P(\xi = k)),$$

we see that $f(2\pi) = 1$, and hence the real part of $\log f(2\pi)$ must vanish. Therefore we have

$$(3.18) \quad \int_{-\infty}^0 (\cos 2\pi u - 1) dM(u) + \int_0^{\infty} (\cos 2\pi u - 1) dN(u) = 0.$$

Using the fact that $M(u)$ and $N(u)$ are non-decreasing and $\cos 2\pi u - 1 \leq 0$ if $u \equiv 0 \pmod{1}$, we obtain that $M(u)$ and $N(u)$ can increase only for negative resp. positive integer values of u . Thus putting $c_n = M(n+0) - M(n-0)$ for $n = -1, -2, \dots$ and $c_n = N(n+0) - N(n-0)$ for $n = 1, 2, \dots$, we obtain

$$(3.19) \quad \log f(t) = it\gamma' + \sum_{n \in \Sigma'} c_n (e^{i n t} - 1)$$

(here and in what follows Σ' means that the summation is extended for every n except for $n = 0$) and we have to put $\gamma' = \gamma - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n c_n}{1 + n^2}$. But it is easy to see that in case $c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-n}, \dots$ were not all equal to 0, ξ would assume also negative integer values; as a matter of fact, we have

$$(3.20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i t (n - \gamma')} = \exp \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (e^{i n t} - 1) \right) = \\ = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i n t} \right)^k}{k!} \right] \exp \left(- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \right)$$

since $c_n \geq 0$ for $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, if $c_{-n} \neq 0$ for some $n > 0$, we should obtain arbitrary large negative integer powers of $e^{i t}$ with positive coefficients at the right of (3.20), but not at the left of (3.20), which is a contradiction; thus $c_n = 0$ for $n = 1, 2, \dots$. As we have supposed $A_0 \neq 0$, we obtain that at the left-hand side of (3.20) the non-vanishing term containing the lowest power of $e^{i t}$ is $A_0 e^{-i t \gamma'}$. But at the right-hand side of (3.20) the term of lowest power in $e^{i t}$ is the constant $e^{-\sum_{n=1}^{\infty} c_n} \neq 0$; hence we must have $\gamma' = 0$. Accordingly we obtain

$$(3.21) \quad \log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{i n t} - 1)$$

As we supposed that $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = N(0)$ is finite, it follows that (3.20) is the characteristic function of a composed Poisson distribution; Theorem 4 is hereby proved. Let us mention the following

COROLLARY. *If a composed Poisson distribution $F(x)$ is the convolution of two infinitely divisible distributions, $F_1(x)$ and $F_2(x)$ which have positive jump at $x=0$, these must also be composed Poisson distributions of degree not exceeding that of $F(x)$.*

This is a generalization of a well-known fact concerning Poisson-distributions. (Cf. [3]). The proof is obvious.

It should be pointed out also that the theorem of §3 of [1] is a simple consequence of Theorem 4.

INSTITUTE FOR APPLIED MATHEMATICS
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

Bibliography

- [1] L. JÁNOSSY, A. RÉNYI and J. ACZÉL, On composed Poisson distributions, I, *these Acta*, **1** (1950), pp. 209–224.
- [2] A. RÉNYI, On some problems concerning Poisson processes, *Publicationes Mathematicae* (Debrecen), **2** (1951), pp. 66–73.
- [3] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. (Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949). (Hungarian translation: B. V. GNYEGYENKO és A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1950.)

(Received 8 May 1951)

ОБОБЩЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПА ПУАССОНА, II

А. РЕНЬИ (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Работа является продолжением совместной работы [1] Л. Яноши, Я. Ацел и автора настоящей статьи. Продолжаются исследования составных распределений Пуассона, т. е. распределений, характеристическая функция которых имеет вид

$$(1) \quad \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int} - 1) \right),$$

где $c_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. В § 1 найден общий вид нестационарных марковских стохастических процессов случайных событий, так как доказывается следующая

Теорема 1. Пусть ξ_t означает число событий, происходящих в интервале времени $(0, t)$, ($\xi_0 \equiv 0$), и предположим что выполнены следующие условия:

а) если $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_r < t_r$, то случайные величины $\xi_{t_1} - \xi_{s_1}, \xi_{t_2} - \xi_{s_2}, \dots, \xi_{t_r} - \xi_{s_r}$ независимы,

в) пусть $W_k(s, t)$ означает вероятность события $\xi_t - \xi_s = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, s < t$) и предположим что для всякой $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такая $\delta > 0$, что если $s_1 < t_2 \leq s_2 < t_3 \leq \dots \leq s_r < t_r < T$ и

$$\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) < \delta, \text{ то имеем } \prod_{j=1}^r W_0(s_j, t_j) > 1 - \varepsilon.$$

Тогда характеристическая функция

$$\varphi(s, t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(s, t) e^{iku}$$

имеет вид

$$\varphi(s, t, u) = \exp \left(\sum_{r=1}^{\infty} (e^{iru} - 1) \int_s^t c_r(\tau) d\tau \right),$$

где $c_r(\tau)$ — неотрицательная, L -интегрируемая функция, и ряд $\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\tau)$ сходится почти всюду, т. е. процесс $\{\xi_t\}$ является нестационарным составным процессом Пуассона.

В § 2 исследуется следующая проблема: пусть каждое событие некоторого нестационарного составного процесса Пуассона является исходным пунктом некоторого другого события второго типа, которое продолжается в течение некоторого промежутка времени; продолжительность события второго рода, которое началось во время t , является случайной величиной с законом распределения $F(t, T)$. Положим $\Phi(t, T) = 1 - F(t, T)$, и обозначим через η_t число событий второго рода, которые происходят в момент t и пусть $p_N(t)$ означает вероятность того что $\eta_t = N$ ($N = 0, 1, \dots$). Тогда имеет место следующая

Теорема 2. Если $\Phi(t, T)$ является непрерывной и положительной функцией, тогда положив

$$\chi(z, t) = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) z^N$$

имеем

$$z(z, t) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) (z^k - 1) \right),$$

где

$$d_k(t) = \int_0^t \sum_{n=k}^{\infty} c_n(\tau) \binom{n}{k} (\Phi(\tau, t-\tau))^k (1-\Phi(\tau, t-\tau))^{n-k} d\tau,$$

т. е. распределение случайной величины ξ_{nk} является составным распределением Пуассона. Частный случай этой теоремы доказан в работе [2].

В § 3 доказана следующая

Теорема 3. Пусть $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ — независимые случайные величины, принимающие лишь неотрицательные целые значения, и предположим, что величины ξ_{nk} „бесконечно малы“, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k=1, 2, \dots, k_n} P(\xi_{nk} = 0) = 0$.

Положим

$$z_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}, \quad p_{nks} = P(\xi_{nk} = s) \quad \text{и} \quad c_{ns} = \sum_{k=1}^{k_n} p_{nks}$$

для того чтобы распределение от z_n сходилась бы к некоторому предельному распределению при $n \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно существование таких постоянных

$c_s (s = 1, 2, \dots)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{ns} - c_s| = 0$. Если это условие выполняется, то распределение от z_n является составным распределением Пуассона, характеристическая функция которого есть

$$\exp \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s (e^{st} - 1) \right).$$

Доказательство этой теоремы опирается на одну теорему Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [3].

В § 4 составные распределения Пуассона характеризуются как безгранично делимые распределения неотрицательных целочисленных случайных величин, которые принимают значение 0 с положительной вероятностью.

В работе указаны некоторые возможные физические и технические применения теории составных распределений Пуассона, например при исследовании тока в электронных лампах, в области явлений радиоактивного распада, при изучении нагрузки телефонных станций, при определении распределения значений удельного веса в сплавах и т. д.

REALITÄTSGRAD UND REALITÄTSSTELLEN VON KOMPLEXEN POLYNOMEN

Von

GYULA SZ.-NAGY (Szeged), Mitglied der Akademie

1. Besitzt das Polynom $f(z)$ mit komplexen Koeffizienten m reelle Nullstellen und p bzw. q nichtreelle Nullstellen mit positiven bzw. negativen Imaginärteilen (jede Nullstelle nach ihrer Vielfachheit gerechnet), so wird die Zahl $r = m + p - q$ der *Realitätsgrad* des Polynoms $f(z)$ genannt.

Das Polynom $f(z)$ hat den Grad $n = m + p + q$ und den Realitätsgrad $r = m + p - q = n - 2q$ bzw. $r = m + q - p = n - 2p$, je nachdem $p \geq q$ bzw. $p < q$ ist. Der Realitätsgrad ist also um eine nichtnegative gerade Zahl kleiner als der Grad. Die Zahlen n und r stimmen dann überein, wenn alle nichtreellen Nullstellen von $f(z)$ oberhalb oder alle unterhalb der reellen Achse liegen. Der Realitätsgrad von $f(z)$ verschwindet, falls das Polynom $f(z)$ keine reelle Nullstelle besitzt und oberhalb der reellen Achse ebenso viel nichtreelle Nullstellen vorhanden sind, wie unterhalb.

Sind $c_1, c_2, \dots, c_m$ die reellen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ und sind $a_1, a_2, \dots, a_p$ bzw. $b_1, b_2, \dots, b_q$ seine nichtreellen Nullstellen mit positiven bzw. negativen Imaginärteilen, so hat $f(z)$ die Form

$$(1) \quad f(z) = f_0(z) g(z), \quad f_0(z) = \prod_{k=1}^m (z - c_k), \quad g(z) = C \prod_{h=1}^p (z - a_h) \prod_{l=1}^q (z - b_l), \quad (C \neq 0).$$

Die *Realitätsstellen* des Polynoms $f(z)$ sind die Punkte x der reellen Achse, in denen der Wert $f(x)$ reell ist. Diese Punkte sind entweder Realitätsstellen des komplexen Polynoms $g(z)$ oder Nullstellen des reellen Polynoms $f_0(z)$. Ist

$$g(z) = U(z) + iV(z) \quad \text{und} \quad W(z) = f_0(z) V(z),$$

und haben die Polynome $U(z)$ und $V(z)$ reelle Koeffizienten, so stimmen die Realitätsstellen des Polynoms $f(z)$ und die reellen Nullstellen des Polynoms $W(z)$ überein. Eine s -fache reelle Nullstelle des Polynoms $W(z)$ sei eine s -fache Realitätsstelle des Polynoms $f(z)$ genannt. Das Polynom $V(z)$ hat den

Grad $p \mid q$, wenn C nichtreell ist. Ist aber C reell, so hat $V(z)$ einen Grad $p+q-s$ ($s \geq 1$). Dann ist $z \sim$ als eine s -fache Nullstelle den reellen Nullstellen von $V(z)$ und als eine s -fache Realitätsstelle den Realitätsstellen von $f(z)$ zuzurechnen.

Hat das Polynom $V(z)$ t Paare nichtreeller Nullstellen, so besitzt das Polynom $f(z)$ genau $w = m + p + q - 2t$ Realitätsstellen. Die Differenz

$$w - r = p + q - p - q = -2t$$

ist immer eine gerade Zahl.

Auf Grund dieser Definitionen gilt der Satz:

Ein Polynom r -ten Realitätsgrades besitzt mindestens r Realitätsstellen. Der Grad eines (nichtreellen) Polynoms ist nie kleiner als die Anzahl w seiner Realitätsstellen. Ist die Anzahl w der Realitätsstellen größer als r , so ist sie um eine gerade Zahl größer.

Ist $n \geq r$ und $n-r$ gerade, so gibt es Polynome n -ten Grades und r -ten Realitätsgrades, die genau r endliche und verschiedene Realitätsstellen besitzen. Bei diesen Polynomen ist der Koeffizient der höchsten Potenz nichtreell.

Es genügt offenbar diesen Satz für den Fall $f(z) = g(z)$ zu beweisen.

Während ein Punkt x die reelle Achse in positiver Richtung beschreibt, verändern sich die Winkel $\arg(x-a_h)$ und $\arg(x-b_k)$ von $-\pi$ bzw. von $+\pi$ bis Null stetig und monoton. Unterdessen verändert sich der Winkel

$$\omega(x) = \arg g(x) = \arg C + \sum_{h=1}^p \arg(x-a_h) + \sum_{k=1}^q \arg(x-b_k)$$

von $A = \arg C - p\pi + q\pi$ ausgehend bis $B = \arg C$ stetig, somit durchläuft $\omega(x)$ eine Strecke von der Länge $p-q\pi$. Der Wert $g(x)$ ist dann und nur dann reell, wenn $\omega(x)$ mit einem der Punkte $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) zusammenfällt. Zwischen den Punkten A und B gibt es offenbar $r = p-q$ bzw. $r-1$ Punkte $k\pi$, je nachdem C nichtreell bzw. reell ist. Im zweiten Fall ist aber auch der unendlichferne Punkt als eine Realitätsstelle zu betrachten.

Die gerade Zahl $w-r$ ist also nichtnegativ. Damit ist der erste Absatz des Satzes bewiesen.

Wir beweisen, daß es zu jedem Paar n, r (mit $r \leq n, n-r$ gerade) ein Polynom gibt, bei welchem $\omega(x)$ sich monoton verändert. Wir wählen $\frac{n-r}{2}$

Paare konjugiert komplexer Zahlen und r Zahlen γ_h mit positiven Imaginärteilen für Nullstellen eines Polynoms $f(z)$ mit einem beliebigen nichtreellen Anfangskoeffizienten C . Dann ist $f(z)$ ein Polynom n -ten Grades und r -ten

Realitätsgrades, da $\omega(x) = \arg f(x) = \arg C + \sum_{h=1}^r \arg(x-\gamma_h)$ von $\arg C - r\pi$ bis $\arg C$ monoton wächst.

Aus der Interpolationsformel ergibt sich unmittelbar, daß der Grad eines nichtreellen Polynoms nie kleiner ist, als die Anzahl seiner Realitätsstellen.

Damit ist der Satz bewiesen.

2. Für zwei Realitätsstellen eines Polynoms, dessen nichtreelle Nullstellen auf der einen Seite der reellen Achse liegen, gilt der Satz:

Hat ein Polynom $f(z)$ nur auf der einen Seite der reellen Achse nicht-reelle Nullstellen, ist ferner die Anzahl seiner nichtreellen Nullstellen $< p$, und nimmt das Polynom in den Punkten u und v ($u < v$) der reellen Achse von Null verschiedene reelle Werte an, so enthält das Kreisbogen $K(u, v; \frac{\pi}{p})$, von dessen Punkten aus die Strecke (u, v) unter einem Winkel $> \frac{\pi}{p}$ erscheint, mindestens eine nichtreelle Nullstelle des Polynoms.

Zum Beweis dieses Satzes kann man offenbar annehmen, daß $f(z)$ genau p nichtreelle Nullstellen besitzt und diese positive Imaginärteile haben, daß ferner $u < v$ ist.

Hat das Polynom $f(z)$ die Form (1), so hat das Verhältnis

$$\frac{f(v)}{f(u)} = \frac{f_0(v)}{f_0(u)} \prod_{h=1}^p \frac{v - a_h}{u - a_h}$$

einen von Null verschiedenen reellen Wert. Daher ist die Zahl e in der Gleichung

$$(2) \quad \sum_{h=1}^p \arccos \frac{v - a_h}{u - a_h} = \sum_{h=1}^p \alpha_h = e\pi$$

eine ganze Zahl.

Die Zahl α_h bedeutet den Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{uv}$ vom Punkt a_h aus erscheint. Da $u < v$ ist und die Punkte a_h oberhalb der reellen Achse liegen, sind $\alpha_h > 0$ und $e \geq 1$.

Wäre jede nichtreelle Nullstelle a_h des Polynoms $f(z)$ außerhalb des Kreisbogens $K(u, v; \frac{\pi}{p})$ gelegen, so beständen die Ungleichungen

$$0 < \alpha_h < \frac{\pi}{p} \quad \text{und} \quad 0 < \sum_{h=1}^p \alpha_h < \pi.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weil $\sum \alpha_h \geq \pi$ ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

Dieser Satz läßt sich auf folgende Weise verallgemeinern:

Liegen die nichtreellen endlichen Nullstellen $a_1, a_2, \dots, a_p$ bzw. die nicht-reellen endlichen Pole $b_1, b_2, \dots, b_q$ einer gebrochenen rationalen Funktion $R(z)$ oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse und sind die Werte von $R(z)$ in den Punkten u und v der reellen Achse reell und von Null verschieden, so enthält das Kreisbogen $K(u, v; \frac{\pi}{p+q})$ mindestens einen der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_p$ und $b_1, b_2, \dots, b_q$.

Die Funktion $R(z)$ hat offenbar die Form

$$R(z) = CR_0(z)R_1(z), \quad C \neq 0, \quad R_1(z) = \prod_{h=1}^p (z-a_h) : \prod_{k=1}^q (z-b_k),$$

wo $R_0(z)$ eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten, Nullstellen und Polen ist.

Das Verhältnis

$$\frac{R(v)}{R(u)} = \frac{R_0(v)}{R_0(u)} \prod_{h=1}^p \frac{v-a_h}{u-a_h} : \prod_{k=1}^q \frac{v-b_k}{u-b_k}$$

ist eine von Null verschiedene reelle Zahl. Daraus folgt die Gleichung

$$(3) \quad \sum_{h=1}^p \arccos \frac{v-a_h}{u-a_h} - \sum_{k=1}^q \arccos \frac{v-b_k}{u-b_k} = \sum_{h=1}^p \alpha_h - \sum_{k=1}^q \beta_k = e\pi,$$

wo e eine ganze Zahl ist. Der Wert α_h bzw. β_k bedeutet den Winkel, unter dem der Vektor $\overrightarrow{uv}$ vom Punkt a_h bzw. b_k aus erscheint.

Im Falle $u < v$ ist $0 < \alpha_h < \pi$ und $0 > \beta_k > -\pi$, weil die Punkte a_h bzw. b_k oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse liegen. Beide Winkel α_h und $-\beta_k$ liegen also zwischen 0 und π .

Enthielte das Kreisziweck $K\left(u, v; \frac{\pi}{p+q}\right)$ keinen der Punkte a_h und b_k , so beständen die Ungleichungen

$$0 < \alpha_h < \frac{\pi}{p+q}, \quad 0 < -\beta_k < \frac{\pi}{p+q} \quad \text{und} \quad 0 < e\pi = \sum_{h=1}^p \alpha_h - \sum_{k=1}^q \beta_k < \pi.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weil e eine ganze Zahl ist.

(Eingegangen am 27. April 1950.)

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ СТЕПЕНИ И МЕСТА КОМПЛЕКСНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Д. С.-НАДЬ (Cered)

(Резюме)

Если многочлен с комплексными коэффициентами имеет m действительных корней и p комплексных корней с положительной и q с отрицательной мнимой частью, то $r = m + |p - q|$ есть действительная степень, а $n = m + p + q$ его алгебраическая степень. Действительные места многочлена те точки на действительной оси, где многочлен принимает действительные значения. Сюда же относится и место $z = \infty$, если коэффициент старшего члена многочлена действителен.

Многочлен, с действительной степенью, равной r , имеет по крайней мере r действительных мест.

Есть такие многочлены, которые имеют именно r конечных отличных друг от друга действительных мест.

Если для многочлена $f(z)$, $p > 0$, $q = 0$ и если в точках u и v действительной оси $f(u)$ и $f(v)$ не равные нулю действительные числа, то многочлен имеет по крайней мере один комплексный корень в том двухугольнике из дуг окружности из точек которого интервал (u, v) виден под углом не меньшим $\frac{\pi}{p}$. Эту теорему можно обобщить и для таких рациональных дробных функций, комплексные корни и полюса которых находятся на противоположных сторонах действительной оси.

EINE DETERMINANTENIDENTITÄT FÜR SYMMETRISCHE FUNKTIONEN

Von

L. RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

Bezeichne $p_i (i=0, 1, \dots)$ und $s_i (i=0, \dots, n)$ die Potenzsumme bzw. elementarsymmetrische Funktion i -ten Grades der Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ (insbesondere $s_0 = 1$), ferner werde $s_i = 0$ für $i > n$ gesetzt. Mit $(a_{ih})_{i,h}$ bezeichnen wir die Determinante n -ter Ordnung mit dem Element a_{ih} in der i -ten Zeile und h -ten Spalte.

Der bekannten Diskriminantenformel

$$D(p_{i,h}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$$

stellen wir eine einigermaßen ähnlich gebaute Formel beiseite im folgenden

SATZ. Es gilt

$$(1) \quad |s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j) \quad (n \geq 2).$$

FOLGERUNG. Bezeichnet $S_i \left(i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)$ die i -te elementarsymmetrische Funktion der Produkte $x_i x_k (1 \leq i < k \leq n)$, so läßt sich die rechte Seite von (1) als

$$1 - S_1 + S_2 - \dots \pm S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

schreiben. Somit lehrt (1), wie man die S_i durch die s_i ausdrücken kann. Das wird bequemer, wenn man (1) durch Einführung einer neuen Variablen z homogenisiert und dann z^2 durch z ersetzt:

$$(2) \quad |z^k s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = z^{\binom{n}{2}} - S_1 z^{\binom{n}{2}-1} + \dots \pm S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} z^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

BEMERKUNG. Die linke Seite von (1) ist die zur Matrizendifferenz

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ s_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{n-2} & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_3 & & & \\ \vdots & & & \\ s_n & & & \end{pmatrix}$$

gehörige Determinante (über der Hauptdiagonale bzw. unter der Nebendiagonale stehen lauter 0). Übrigens dürfte man in (1) auf der linken Seite n statt $n-1$ schreiben.

BEWEIS. Man liest von (3) ab, daß die linke Seite von (1) das konstante Glied 1 hat und vom Grade $n(n-1)$ ist. Deshalb genügt es wegen Symmetriegründe zu beweisen, daß die linke Seite von (1) durch $1-x_{n-1}x_n$ teilbar ist.

Um diese Teilbarkeit auszuweisen, verfahren wir zweckmäßig so, daß wir $n+2$ statt n schreiben. Dann haben wir zu zeigen, daß

$$(4) \quad |\sigma_{i-k} - \sigma_{i+k}|_{n+1}$$

durch $1-x_{n+1}x_{n+2}$ teilbar ist, wobei σ_i das Analogon von s_i für $n+2$ statt n bedeutet. Dann gilt

$$\sigma_i = s_i + s_{i-1}(x_{n+1} + x_{n+2}) + s_{i-2}x_{n+1}x_{n+2},$$

also

$$\sigma_i \equiv s_i + s_{i-2} + s_{i-1}t \pmod{1-x_{n+1}x_{n+2}} \quad (i=0, \pm 1, \dots),$$

wobei $t = x_{n+1} + x_{n+2}$ gesetzt wurde. Hiernach ist (4) kongruent

$$(5) \quad |(s_{i-k} - s_{i+k-2}) + (s_{i-k-2} - s_{i+k}) + (s_{i-k-1} - s_{i+k-1})t|_{n+1}$$

mod $(1-x_{n+1}x_{n+2})$. Wir führen die $(n+1)$ -dimensionalen Spaltenvektoren

$$\alpha_k = (s_{i-k} - s_{i+k-2}) \quad (k=1, \dots, n+3)$$

ein. Dann ist die k -te Spalte der Determinante (5) gleich

$$\alpha_k + \alpha_{k+2} + t\alpha_{k+1} \quad (k=1, \dots, n+1).$$

Da aber die drei Spaltenvektoren

$$\alpha_2 = (s_{i-1} - s_{i-1}), \alpha_{n+2} = (s_{i-n-2} - s_{i+n}), \alpha_{n+3} = (s_{i-n-3} - s_{i+n+1})$$

verschwinden, so hängen alle Spalten der Determinante (5) von den n Spalten $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ linear ab. Das bedeutet das Verschwinden von (5), d. h. die behauptete Teilbarkeit von (4) und somit die Richtigkeit des Satzes.

(Eingegangen am 21. März 1951.)

ОДНО ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Л. РЭДЭИ (Серед)

(Резюме)

Пусть $p_i (i = 0, 1, \dots)$ обозначает сумму степеней, а $s_i (i = 0, 1, \dots, n)$ элементарную симметричную функцию переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, $s_0 = 1$ и $s_i = 0$, если $i = 0$ или $i > n$. Пусть $a_{i,k}$ определитель степени n , в котором $a_{i,k}$ k -й элемент i -ой строки. Доказывается формула

$$|s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = \prod_{1 \leq i \leq k \leq n} (1 - x_i x_k)$$

похожая на известную формулу

$$|p_{i+k}|^n = \prod_{1 \leq i \leq k \leq n} (x_i - x_k)^2.$$

Отсюда

$$|z^k s_{i-k} - s_{i+k}|_{n-1} = z^{\binom{n}{2}} - S_1 z^{\binom{n}{2}-1} + \dots \pm S_{\binom{n}{2}},$$

где z переменное и S_l l -ая элементарная симметричная функция произведений $x_i x_k$ ($1 \leq i \leq k \leq n$). Из этого тождества можно выразить S_l при помощи s_i .

ÜBER DIE ABSCHNITTE DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN

Von

LJUBOMIR ILIEFF (Sofia)

(Vorgelegt von A. RÉNYI)

Es bezeichne S_1 die Klasse der Funktionen von der Form

$$(1) \quad f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

die innerhalb des Kreises $|z| < 1$ schlicht und regulär sind und S_2 die Klasse der Funktionen

$$(2) \quad f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots,$$

die innerhalb desselben Kreises ungerade, schlicht und regulär sind.

In der vorliegenden Mitteilung stellen wir die folgenden Sätze auf:

SATZ I. *Es gehöre die Funktion*

$$(3) \quad f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

zur Klasse S_1 und es sei:

$$(4) \quad \sigma_n^{(1)}(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

Das Polynom

$$(5) \quad \frac{\sigma_n^{(1)}(z)}{z} = 1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$$

verschwindet $n \geq 1$ im Kreise $|z| < 1 - 2 \frac{\ln 3n}{n}$, — bei $n \geq 55$ im Kreise

$|z| < 1 - 2 \frac{\ln n}{n}$ — nicht. Allgemein, bei jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß

(5) im Kreise $|z| < 1 - 2 \frac{\ln \varepsilon n}{n}$ nicht verschwindet, falls $n \geq N$.

SATZ II. *Es gehöre die Funktion*

$$(6) \quad f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$$

zur Klasse S_2 und es sei

$$(7) \quad \sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Das Polynom

$$(8) \quad \frac{\sigma_n^{(2)}(z)}{z} = 1 + a_1 z^2 + \dots + a_{2n+1} z^{2n}$$

verschwindet bei $n-1$ im Kreise $|z| \leq \left| 1 - \frac{\ln 4,3n}{n} \right|$ nicht. Allgemein, bei jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß (8) im Kreise $|z| \leq \left| 1 - \frac{\ln \varepsilon n}{n} \right|$ nicht verschwindet, falls $n \geq N$.

Beweis des Satzes I. Man setze

$$(9) \quad f_1(z) = \sigma_n^{(1)}(z) + p_n^{(1)}(z).$$

Es ist nach dem Verzerrungssatz

$$(10) \quad \left| \frac{f_1(z)}{z} \right| \geq \frac{1}{(1+r)^2},$$

wo $|z| \leq r < 1$. Gilt also für $|z| \leq r_n < 1$ die Ungleichung

$$(11) \quad \left| \frac{p_n^{(1)}(z)}{z} \right| < \frac{1}{(1+r_n)^2},$$

d. h.

$$(12) \quad \left| \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v z^{v-1} \right| < \frac{1}{(1+r_n)^2},$$

so verschwindet $\frac{\sigma_n^{(1)}(z)}{z}$ im Kreise $|z| < r_n$ nicht.

Die Ungleichung (12) ist erfüllt, wenn

$$(13) \quad \sum_{v=n+1}^{\infty} |a_v| r_n^{v-1} < \frac{1}{(1+r_n)^2}$$

ist.

G. M. GOLUSIN [1] hat die Abschätzungen $|a_v| \leq \frac{3}{4} e^v$, $v = 2, 3, \dots$, festgestellt, so daß (13) erfüllt ist, wenn

$$(14) \quad \frac{3}{4} e \sum_{v=n+1}^{\infty} v r_n^{v-1} < \frac{1}{(1+r_n)^2}$$

oder, wenn

$$(15) \quad 3e \sum_{v=n+1}^{\infty} v r_n^{v-1} < 1$$

steht.

Aus der Identität

$$(16) \quad \sum_{v=n+1}^{\infty} r^v = \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

bei $0 < r < 1$, folgt, daß

$$(17) \quad \sum_{v=n+1}^{\infty} v r^{v-1} = r^n \cdot \frac{(n+1)(1-r) + r}{(1-r)^2}.$$

Mit Rücksicht auf (17), geht die Ungleichung (15) in

$$(18) \quad 3er_n^2 \frac{(n+1)(1-r_n) + r_n}{(1-r_n)^2} < 1$$

über.

Nun sei

$$(19) \quad r_n = 1 - \frac{\alpha}{n}, \quad 0 < \alpha < n,$$

also

$$(20) \quad r_n^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2 < e^{-\alpha}$$

und

$$(21) \quad (n+1)(1-r_n) + r_n = \alpha + 1.$$

Damit wird (18) erfüllt, wenn

$$(22) \quad 3en^2 e^{-\alpha} \frac{\alpha+1}{\alpha^2} < 1.$$

Setzt man $\alpha = 2 \ln 3n$, also $r_n = 1 - 2 \frac{\ln 3n}{n}$, so ist (22) bei $n \geq 1$

erfüllt; setzt man $\alpha = 2 \ln n$, so ist (22) bei $n \geq 55$ richtig. Allgemein, bei jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß (22) erfüllt ist, wenn $\alpha = 2 \ln \varepsilon n$ und $n \geq N$.

Der Satz II wird mit derselben Methode bewiesen. Man braucht nur folgendes zu bemerken: Gehört die Funktion

$$f_2(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

zur Klasse S_2 , so ist nach dem Verzerrungssatz

$$\left| \frac{f_2(z)}{z} \right| \geq \frac{1}{1+r^2}$$

und, wie V. LEVIN [2] bewiesen hat: $|\alpha_{2v+1}| < 3 \cdot 4$, $v = 1, 2, 3, \dots$

Zitierte Literatur

1. Г. М. Голузин, Мат. сборник, 22 (64), (1948), S. 373—279.
2. V. LEVIN, Proc. London Math. Soc., 39 (1935), S. 467—480.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT ZU SOFIA.

(Eingegangen am 8. Februar 1951.)

ТЕОРЕМЫ О КОНЕЧНЫХ СУММАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ (София)

(Резюме)

Пусть S_1 — класс функций

$$(1) \quad f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, и S_2 — класс функций

$$(2) \quad f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$$

нечетных, регулярных и однолистных в том же круге.

В настоящей работе установлены следующие теоремы:

Теорема I. Пусть функция

$$(3) \quad f_1(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

принадлежит классу S_1 и

$$(4) \quad \sigma_n^{(1)}(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n.$$

Многочлен

$$(5) \quad \frac{\sigma_n^{(1)}(z)}{z} = 1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$$

при $n \geq 1$ не обращается в ноль в круге $|z| < 1 - 2 \frac{\ln 3n}{n}$; при $n \geq 55$ тот же многочлен не обращается в ноль в круге $|z| < 1 - 2 \frac{\ln n}{n}$. Вообще, при всяком $\varepsilon > 0$ существует индекс N , так что многочлен (5) не обращается в ноль в круге $|z| < 1 - 2 \frac{\ln \varepsilon n}{n}$, если $n \geq N$.

Теорема II. Пусть функция

$$(6) \quad f_2(z) = z + a_3 z^3 + \dots$$

принадлежит классу S_2 и

$$(7) \quad \sigma_n^{(2)}(z) = z + a_3 z^3 + \dots + a_{2n+1} z^{2n+1}.$$

Многочлен

$$(8) \quad \frac{\sigma_n^{(2)}(z)}{z} = 1 + a_3 z^2 + \dots + a_{2n+1} z^{2n}$$

при $n \geq 1$ не обращается в ноль в круге $|z| < \left\{ 1 - \frac{\ln 4,3n}{n} \right\}^{1/2}$. Вообще при всяком $\varepsilon > 0$ существует индекс N , так что многочлен (8) не обращается в ноль в круге $|z| < \left\{ 1 - \frac{\ln \varepsilon n}{n} \right\}^{1/2}$, если $n \geq N$.

UNE REMARQUE SUR LES FORMULES DE RÉCURRENCE

Par

RICHARD OBLÁTH (Budapest)

(Présenté par P. TURÁN)

Introduction

On considère dans l'Analyse beaucoup de fonctions importantes qui admettent des *formules de récurrence* ou des *théorèmes d'addition*. Rappelons nous p. e. les fonctions sphériques et les fonctions de Bessel. Il y a deux espèces de ces fonctions P_n et Q_n ; et I_n et O_n liées par les relations fondamentales

$$\frac{1}{x-z} = \sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(z) Q_n(x),$$

$$\frac{1}{x-z} = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n I_n(z) O_n(x) \quad (\varepsilon_0 = 1; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \dots = 2)$$

où Q_n respectivement O_n sont des coefficients de l'expansion selon des P_n ou des I_n . Aussi ces fonctions "de second espèce" admettent des formules de récurrence qui ont une connexion étroite avec les formules auxquelles obéissent les fonctions P_n , respectivement I_n . Par exemple

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1) P_n, \quad Q'_{n+1} - Q'_{n-1} = (2n+1) Q_n,$$

ou

$$2I'_n = I_{n-1} - I_{n+1}, \quad 2O'_n = O_{n-1} - O_{n+1}.$$

Ce rapport se présente aussi chez d'autres systèmes de fonctions; mais les démonstrations que l'on rencontre dans la littérature sont très différentes puisqu'elles se servent des propriétés particulières des fonctions spéciales considérées. Nous allons généraliser l'observation de ce rapport, faite audessus, aux classes de fonctions plus étendues. Notre démonstration met à la fois en évidence la vraie raison de cette connexion entre des formules linéaires de récurrence qui subsistent entre deux systèmes de fonctions. Cette raison est le rôle symétrique de deux systèmes dans l'expansion (1).

Considérons une suite de fonctions de la variable complexe

$$G_0(z), G_1(z), \dots, G_n(z), \dots$$

holomorphes dans un domaine commun. Définissons la fonction $\varphi(x, z)$ dans l'intérieur d'un contour fermé, composé seulement des arcs analytiques ou dans une étoile où la valeur x est fixe, et supposons, pour fixer les idées, qu'elle y soit régulière, exception faite d'un pôle d'ordre quelconque en $z = x$. Nous supposons en outre que — au moins dans une partie du domaine mentionné — le développement

$$(1) \quad \varphi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) G_n(z)$$

converge uniformément et absolument et que la fonction représentée par la série des modules soit continue. Les fonctions $R_n(x)$ sont des fonctions rationnelles ou méromorphes de leur argument. (La restriction du domaine de la variable x mène quelquefois aux théorèmes remarquables.) Ces conditions sont remplies par des fonctions importantes. De tels développements, souvent sous des conditions plus restrictives, ont une littérature immense.¹ Si le développement (1) existe, nous appelons ses coefficients $R_n(x)$ les fonctions "réciproques aux fonctions $G_n(z)$ ". Par exemple, les fonctions sphériques

¹ Le cas traité le plus souvent est $\varphi(x, z) = \frac{1}{x-z}$. Un type important est dans

lequel on a $G_k(z) = (z-c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$. Le mémoire le plus ancien y relatif est: J. KÖNIG, Über die Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen, *Math. Ann.*, **5** (1870), pp. 310–340, mais il est resté inconnu.

Les problèmes qui se rattachent au domaine de convergence uniforme et l'unicité du développement (1) sont complètement résolus dans les trois mémoires: G. JULIA, Sur un développement des fonctions holomorphes, *Acta Math.*, **54** (1930), pp. 263–295; G. VALIRON, Sur une classe de développements en série, *Bull. des Sciences Math.*, (2) **69** (1934), pp. 26–44; L. ONOFRI, Su una speciale classe di serie di funzioni analitiche, *Annali di mat. pura ed appl.*, (4), **12** (1933–34), pp. 41–56 et (4), **13** (1934–35), pp. 209–225.

Des oeuvres importants sur ce sujet traitant à la fois l'unicité du développement sont G. D. BIRKHOFF, Sur une généralisation de la série de Taylor, *Comptes Rendus Acad. Paris*, **164** (1917), pp. 942–945; W. GONTCHAROFF, Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Généralisation de la série d'Abel, *Ann. Scient. de l'École normale sup.*, (3), **47** (1930), pp. 1–78; J. OKADA, On a certain expansion of analytic functions, *The Tôh. Math. Journ.*, **22** (1923), pp. 325–335; L. V. WIDDER, A generalisation of Taylor's series, *Transact. of the Amer. Math. Soc.*, **30** (1928), pp. 126–154; S. IZUMI, On the expansion of analytic functions, *The Tôh. Math. Journal*, **28** (1927), pp. 97–106; S. TAKAHASHI, On the expansion of analytic functions, *ibid.*, **35** (1932), pp. 242–243, et A generalisation of Taylor's series, *Japanese Journ. of Math.*, **7** (1930), pp. 187–198; S. KAKEYA, *Proc. of the Phys. Math. Soc. of Japan*, **2** (1920), pp. 96–104.

On trouve la bibliographie chez: GERTRUDE STITH KETCHUM, On certain generalisations of the Cauchy–Taylor expansion theory, *Transact. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), pp. 208–224. J'ai l'intention de revenir à ce sujet.

$Q_n(x)$ et $P_n(z)$ sont réciproques dans ce sens. Les problèmes qui se rattachent à la détermination du domaine de convergence uniforme des séries du type (1) et à l'unicité de la représentation par ce développement sont traités dans la littérature à plusieurs reprises.

Il y a des fonctions remarquables considérées dans l'Analyse qui admettent des formules de récurrence et souvent des théorèmes d'addition. Leur démonstration varie pour presque chaque classe de fonctions.²

Nous donnons dans la note présente un procédé très simple, valable à la fois pour une classe très étendue de fonctions. Nous allons voir qu'il y a une connexion étroite entre les formules de récurrence linéaires (et les théorèmes d'addition) des fonctions réciproques, ce qui est une conséquence du développement (1). Chaque formule à laquelle satisfont les fonctions $G_n(z)$ entraîne une correspondante pour le système $R_n(x)$.

Nous relevons encore le théorème 1, intéressant par soimême, selon lequel la dérivée d'une série de fonctions absolument convergente, est également absolument convergente si encore la série des modules représente une fonction continue. Nous en avons besoin pour assurer la légitimité de nos conclusions.

1 §. Un théorème sur le développement en série de la dérivée

Avant d'aborder le sujet qui fait l'objet de la note présente, nous laissons précéder un théorème dont nous avons besoin dans la démonstration et qui peut rendre de bons services dans quelques problèmes d'Analyse.

Soient (pour simplifier la notation)

$$f_1(z), f_2(z), \dots$$

des fonctions holomorphes de la variable complexe z dans un domaine infini, ou clos, entouré par une courbe composée des arcs analytiques.

THÉORÈME I. *La convergence uniforme et absolue du développement*

$$(1, a) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

² Voir p. e. SCHLÄFLI, Einige Bemerkungen zu Herrn Neumanns Untersuchungen über die Besselschen Funktionen, *Math. Ann.*, **3** (1870), p. 134; GRAF-GUBLER, *Theorie der Besselschen Funktionen*, Bd II. (Zürich, 1900), pp. 75 et 79; J. KÖNIG, Über die Darstellung der Funktionen durch unendliche Reihen, *Math. Ann.*, **5** (1870), pp. 310–340, et *ibid.* **17**, p. 85; L. GEGENBAUER, Über die Funktion X_n''' , *Sitz. Ber. Akad. Wien*, 2. Cl., **70** (1873), pp. 6–16; SONINE, Les fonctions cylindriques, *Math. Ann.*, **16** (1880), pp. 1–80; GRAF, Über die Addition und Subtraktion der Argumente bei Besselschen Funktionen nebst einer Anwendung, *ibid.*, **43** (1893), pp. 136–144. Le même théorème d'addition était publié pour beaucoup d'autres fonctions analogues p. e. WATSON, *A treatise on the Bessel functions* (Cambridge, second ed. 1944), pp. 66, 71, 74, 79, 82, 274, 311, 342 etc.; E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Cambridge, 1931), pp. 67, 289, 373, 380–384.

entraîne la convergence uniforme et absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$$

dans le même domaine et représente ici $f'(z)$, sous la condition qu'encore la série des modules de $f_n(z)$ représente une fonction continue.

Une partie de ce théorème est identique avec le célèbre "Doppelreihensatz" dû à WEIERSTRASS. Reste à démontrer la proposition sur la convergence absolue. La démonstration fondée sur l'intégrale de CAUCHY est suggérée par la démonstration bien connue du Doppelreihensatz.

En vertu du théorème de CAUCHY on a

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}$$

étendue sur un contour dans l'intérieur ou sur la périphérie du domaine mentionné. On a donc

$$|f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f_n(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - z|^2}$$

et pour N quelconque

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{|\zeta - z|^2} \sum_{n=N}^{N+k} |f_n(\zeta)| |d\zeta|,$$

mais la série (1, a) est absolument et uniformément convergente, c. à. d. il appartient à tout $\varepsilon > 0$ un nombre $N = N(\varepsilon)$ qu'on ait

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f_n(\zeta)| < \varepsilon.$$

Pour nous convaincre de la légitimité de cette conclusion, rappelons nous le théorème important connu de DINI³ selon lequel si une série de fonctions à termes positifs représente une fonction continue, la série est uniformément convergente. Nous avons supposé que la série des modules de la série (1, a) est continue,⁴ du théorème que nous venons de mentionner s'en suit qu'elle est uniformément convergente. Notre conclusion est donc juste, si ζ appartient au domaine mentionné. Nous sommes par conséquent à même de choisir un nombre N convenant pour lequel

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f'_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2}.$$

³ G. H. HARDY, Sir George Stokes and the concept of uniform convergence, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **19** (1918), pp. 148—156. Voir aussi E. C. TITCHMARSH, *The theory of functions* (Oxford University Press; 2 édition, 3-ème photoprint 1949), p. 13, Art. 1.31.

⁴ La convergence absolue n'entraîne pas toujours la convergence uniforme M. P. TURÁN en avait donné un exemple assez simple.

Cette dernière intégrale étant bornée, il y a un tel nombre M que la condition

$$\int \frac{|dz|}{|\zeta - z|^2} < M$$

soit remplie dans tous les points du chemin de l'intégration et par suite

$$\sum_{n=N}^{N+k} |f'_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha} M + \delta$$

ce qui démontre le théorème.

§ 2. Formules de récurrence

Les deux séries qui résultent de la série (1) par différentiation membre par membre selon z et x convergent uniformément et absolument en vertu du théorème 1, ce qui est la conséquence immédiate de la convergence uniforme et absolue en deux variables postulées de la série (1). Ces conditions sont également remplies par la plupart des fonctions étudiées. Le théorème 1 garantit la légitimité de nos conclusions.

THÉORÈME 2. Si la relation

$$(2) \quad \frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{\partial q}{\partial x}$$

subsiste et si $G_n(z)$ satisfait à la formule récursive

$$(I, 1a) \quad \frac{dG_n(z)}{dz} = \sum_{r=-k}^k a_r G_{n+r}(z) \quad (G_r = 0 \text{ pour } r < 0)$$

on a simultanément

$$(I, 1b) \quad \frac{dR_n(x)}{dx} = - \sum_{r=-k}^k a_r R_{n+r}(x) \quad (R_r = 0 \text{ pour } r < 0).$$

Démonstration. La convergence uniforme, l'unicité du développement et la convergence absolue supposées nous assurent en vertu du théorème 1 que toutes nos conclusions que nous allons faire, sont permises. On a notamment

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dG_n(z)}{dz} R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) \sum_{r=-k}^k a_r G_{n+r}(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} R_n(a_{-k} G_{n-k} + a_{-k+1} G_{n-k+1} + \dots + a_k G_{n+k}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(a_{-k} R_{n+k} + a_{-k+1} R_{n+k-1} + \dots + a_k R_{n-k}) = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(z) \frac{dR_n(x)}{dx}.$$

Sous la condition (2), la dérivée R'_n de la fonction réciproque satisfait à la formule récursive (I, 1b) tout-à-fait analogue à la formule (I, 1a) avec le signe contraire et des coefficients rangés dans l'ordre inverse. On voit immédiatement comment doit-on modifier ce résultat si l'on remplace la condition (2) par

une équation linéaire différentielle plus générale

$$(2, a) \quad a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Nous passons maintenant au cas si les fonctions G_n elles-mêmes admettent une formule récurrente du type (1, 2a).

THÉORÈME 3. *Sous la condition (2), il s'ensuit de*

$$(1, 2a) \quad G_n = a_{-k} G_{n-k} + a_{-k+1} G_{n-k+1} + \dots + a_k G_{n+k} \quad (G_r = 0 \text{ pour } r < 0)$$

que

$$(1, 2b) \quad R_n = (a_{-k} R_{n-k} + a_{-k+1} R_{n-k+1} + \dots + a_k R_{n+k}) \quad (R_r = 0 \text{ pour } r < 0).$$

La démonstration par sommation partielle est tout-à-fait analogue à la précédente. On peut démontrer par la même méthode le

THÉORÈME 4. *La formule de récurrence*

$$(1, 3a) \quad G_n = \sum_{r=-k}^{+k} a_r G'_{n+r} \quad (G_r = 0 \text{ pour } r < 0)$$

implique sous la condition (2) la formule

$$(1, 3b) \quad R_n = \sum_{r=-k}^{+k} a_r R'_{n-r} \quad (R_r = 0 \text{ pour } r < 0).$$

Sur le modèle des fonctions de Bessel il subsiste le

THÉORÈME 5. *La formule*

$$(1, 4a) \quad G_n^{(s)} = \sum_{r=-k}^{+k} a_r G_{n+r} \quad (G_r = 0 \text{ pour } r < 0)$$

entraîne sous la condition (2) la formule

$$(1, 4b) \quad R_n^{(s)} = (-1)^s \sum_{r=-k}^{+k} a_r R_{n-r} \quad (R_r = 0 \text{ pour } r < 0).$$

THÉORÈME 6. *Si le système de fonctions $G_n(z)$ admet deux types de formules de récurrence, par exemple les formules (1, 1a) et aussi les formules du genre*

$$\sum_{r=-l}^l b_r G_{n-r} = \sum_{r=-m}^m c_r G_{n-r},$$

il en est de même pour des fonctions $R_n(x)$ c.-à-d. elles satisfont aussi aux formules analogues dont les coefficients sont composés de a_r, b_r, c_r .

Cette proposition n'est que la combinaison des théorèmes 2 et 3. Elle est une généralisation d'une propriété bien connue des fonctions sphériques.

§ 3. Théorèmes d'addition

Entre les théorèmes d'addition des fonctions $G_n(z)$ et $R_n(x)$ subsiste une réciprocité tout-à-fait analogue à celle des formules de récurrence. Nous énonçons par exemple le

THÉORÈME 7. *Si l'on a*

$$(II, a) \quad G_n(z+t) = \sum_{r=-k}^{+k} \{a_r G_{n-r}(z) - b_r G_{n+r}(z)\} G_r(t)$$

et par exemple la relation

$$(3) \quad \varphi(x, z+t) = \varphi(x-t, z),$$

on a encore

$$(II, b) \quad R_n(x-t) = \sum_{r=-k}^{+k} \{a_r R_{n+r}(x) - b_r R_{n-r}(x)\} G_r(t).$$

La série se termine parce que les fonctions G_n et R_n ne sont définies en général que pour des indices n entiers naturels. (On sait qu'il y a des fonctions spéciales supportables avec les conditions imposées à nos fonctions, qui sont aussi définies pour des indices négatifs ou même fractionnaires, p. e. les fonctions cylindriques. C'est d'ailleurs une propriété spéciale.) La démonstration est basée aussi sur la sommation partielle.

Le cas spécial $b_r = 0$, est digne d'être mentionné, on a alors

$$(II, c) \quad R_n(x-t) = \sum_{r=-k}^{+k} a_r R_{n+r}(x) G_r(t).$$

On voit qu'on pourrait augmenter aisément le nombre des théorèmes de ce genre mais nous nous contentons des précédents.

Je suis reconnaissant à M. PAUL TURÁN pour ses bons conseils amicaux.

(Reçu le 1. Mars 1951.)

ЗАМЕЧАНИЕ О РЕКУРСИВНЫХ ФОРМУЛАХ

Р. ОБЛАТ (Будапешт)

(Резюме)

Если функции $G_0(z), G_1(z), \dots$ голоморфны в некоторой области, единственным полюсом мероморфной функции $g(x, z)$ является $z = x$, и ряд $g(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) G_n(z)$ равномерно и абсолютно сходится в некоторой области, то рекурсивные формулы или теоремы сложения функций $G_n(z)$ влекут за собой соответствующие рекурсивные формулы или теоремы сложения для функций $R_n(x)$. Например формулы (I, 1a) и 1b, (I, 2a) и 2b, и. т. д. § 1 содержат необходимые исследования сходимости.

ON A THEOREM OF PONTRJAGIN

By

T. SZELE (Debrecen)

(Presented by G. HAJÓS)

The following criterion for countable torsion free abelian groups to be the direct sum of cyclic groups is due to PONTRJAGIN. *A countable torsion free abelian group is the direct sum of cyclic groups if and only if every increasing sequence of subgroups of an arbitrary finite rank r contains only a finite number of different subgroups.*¹ Another proof of this important theorem has been given by KULIKOFF who derived it from a general result of his.² In the present note I intend to give a short and simple proof of this theorem in a new, but plainly equivalent formulation.

Let G be an additive abelian group. The letters a, b, c denote elements of G , while the other Latin small letters serve to denote rational integers. The group G is called *torsion free* if it contains no element $\neq 0$ of finite order. The elements $a_1, \dots, a_k$ of such a group G are *linearly independent*, if an equation $m_1 a_1 + \dots + m_k a_k = 0$ implies $m_1 = \dots = m_k = 0$. The maximal number of linearly independent elements of G is the *rank* of G . The only fact, of which I shall make use in what follows, is the basis theorem of finitely generated abelian groups, according to which (for torsion free groups): *a finitely generated torsion free abelian group is the direct sum of r cyclic groups where r is the rank of the group.*

Now we are going to prove the following

THEOREM. *A countable torsion free abelian group G is the direct sum of cyclic groups if and only if in G every subgroup of finite rank is finitely generated.*

REMARK. On account of the cited basis theorem, this criterion may be reformulated in the following obvious manner: a countable torsion free abelian group is the direct sum of cyclic groups if and only if the same is true for

¹ L. PONTRJAGIN, *Topological groups* (Princeton, 1946), pp. 168–169.

² L. KULIKOFF, *Zur Theorie der Abelschen Gruppen von beliebiger Mächtigkeit*, *Mat. Sbornik, N. S.*, **9** (51), (1941), pp. 165–181.

any of its subgroups of finite rank. It is easy to see the equivalence of our criterion with that of PONTRJAGIN. However, the criterion just given is of another character, since it contains a requirement concerning each single subgroup of G and not concerning the lattice of all subgroups of it.

PROOF. The necessity of the condition stated in the theorem follows — even in case G is not countable — from the obvious fact that a subgroup, of finite rank, of the direct sum of cyclic groups is necessarily contained in the direct sum of a finite number of these cyclic groups.

For the sufficiency of the condition we consider a countable torsion free abelian group G whose subgroups of finite rank are finitely generated. We count the elements of G : $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ and put $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ (this symbol denotes the group generated by $a_1, \dots, a_n$). Since the rank of A_{n+1} is at most one greater than that of A_n , there exists an ascending chain $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n \subset \dots$ of subgroups of G such that B_n is of rank n and each element of G belongs to some B_n . Let C_n be the subgroup of G consisting of B_n and of all elements $b \in G$ with $mb \in B_n$ for some natural integer m . (C_n is a group, for $mb \in B_n$ and $m'b' \in B_n$ imply $mm'(b \dots b') \in B_n$.) It is obvious that the rank of C_n is n , the factor group G/C_n is torsion free and each element of G belongs to a certain term of the chain $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_n \subset \dots$. Since C_n is of rank n and hence finitely generated, we have by the basis theorem the direct sum representation

$$C_n = \{c_1\} + \dots + \{c_n\}.$$

We show that the elements c_k may be chosen so that c_k is the same for all C_n ($n \geq k$). Indeed, the rank of C_{n+1} is one greater than the rank of C_n , therefore C_{n+1}/C_n is a finitely generated torsion free abelian group of rank 1, i. e. an (infinite) cyclic group. Consequently, choosing c_{n+1} from a generating coset of the cyclic factor group C_{n+1}/C_n , we obtain

$$C_{n+1} = C_n + \{c_{n+1}\},$$

proving our assertion. This implies that the direct sum

$$\{c_1\} + \dots + \{c_n\} + \dots$$

comprises G , for each element of G is contained in some of C_n . This completes the proof of the theorem.

(Received 2 April 1951)

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ПОНТРЯГИНА

Т. СЕЛЕ (Дебрецен)

(Резюме)

Согласно замечательной теореме Понтрягина счетная абелева группа без кручения разложима в прямую сумму циклических групп тогда и только тогда, если каждая возрастающая цепочка её подгрупп, имеющих один и тот же конечный ранг r , обрывается¹. Теорема эта была выведена Куликовым из одного из его более общих результатов.² В настоящей статье автор дает очень краткое и простое доказательство следующей новой, но как без труда видно, эквивалентной формы теоремы:

Счетная абелева группа без кручения разложима в прямую сумму циклических групп тогда и только тогда, если любая её подгруппа конечного ранга является генерированным конечным числом элементов.

Akadémiai Kiadó (Budapest, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Délmagyarország Nyomda, Szeged 514049

Felelős vezető: Priskin Sándor

Les Acta Mathematica paraissent en russe, français, anglais et allemand et publient des mémoires du domaine des sciences mathématiques.

Les Acta Mathematica sont publiés en cahiers qui seront réunis en volumes de 300 à 350 pages. Il paraît, en général, un volume par an.

Les manuscrits, autant que possible écrits à la machine, doivent être envoyés à l'adresse suivante :

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est 60 forints par volume.

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce extérieur des livres et journaux „Kultúra“ (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Compte courant No. 929.040) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

The Acta Mathematica publish papers on mathematics in Russian, French, English and German.

The Acta Mathematica appear in parts of various size, making up volumes of 300 to 350 pages. On the average, one volume is published annually.

Manuscripts should, if possible, be typewritten and addressed to :

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors or publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Mathematica, is 60 forints a volume. Orders may be placed with „Kultúra“ Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Account No. 929.040) or with representatives abroad.

Die Acta Mathematica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften in russischer, französischer, englischer und deutscher Sprache.

Die Acta Mathematica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band von 20 Bogen. Im allgemeinen erscheint jährlich ein Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind, möglichst mit Maschine geschrieben, an folgende Adresse zu senden :

Acta Mathematica, Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Redaktion und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu senden.

Abonnementspreis pro Band 60 Forints. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen „Kultúra“ (Budapest, VIII., Rákóczi-út 5. Bankkonto Nr. 929.040) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

<i>Alexits, G.</i> , Über die Transformaten der arithmetischen Mittel von Orthogonalreihen Г. Алексич, О преобразованных арифметических средних ортогональных рядов	1
<i>Sz.-Nagy, Gy.</i> , Winkelabweichung und Betragsabweichung bei Polynomen Д. С.-Надь, Изменения аргумента и модуля многочлена	11
<i>Kalmár, L.</i> , Contributions to the reduction theory of the decision problem, third paper Л. Кальмар, Вклады в теорию приведения проблемы разрешимости, третья статья	19
<i>Turán, P.</i> , On Carlson's theorem in the theory of the zeta-function of Riemann П. Туран, Теорема Карлсона в теории ζ -функции Римана	39
<i>Rédei, L.</i> , Über eine Verschärfung eines zahlentheoretischen Satzes von Thue Л. Рэдэи, Обострение одной теоремы Туэ в теории чисел	75
<i>Rényi, A.</i> , On composed Poisson distributions, II А. Реньи, Обобщенные распределения типа Пуассона, II	83
<i>Sz.-Nagy, Gy.</i> , Realitätsgrad und Realitätsstellen von komplexen Polynomen Д. С.-Надь, Действительные степени и места комплексных многочленов	99
<i>Rédei, L.</i> , Eine Determinantenidentität für symmetrische Funktionen Л. Рэдэи, Одно определительное тождество для симметричных функций	105
<i>Ilieff, L.</i> , Über die Abschnitte der schlichten Funktionen Л. Илиев, Теоремы о конечных суммах однолистных функций	109
<i>Obláth, R.</i> , Une remarque sur les formules de récurrence Р. Облат, Замечание о рекурсивных формулах	113
<i>Szele, T.</i> , On a theorem of Pontrjagin Т. Селе, Об одной теореме Понтрягина	121